

المكتور  
حسن كنيش

استاذ في كلية العلوم بجامعة دمشق

محمّد يوسف اللومبي

# الميكانيك والفيزياء

محمّد يوسف اللومبي

١٤٠١ - ١٤٠٢ هـ

١٩٨١ - ١٩٨٢ م

المطبعة الجديدة - دمشق

حسين يوسف الكورني  
قسم الفيزياء - كلية العلوم  
جامعة دمشق - طرابلس

الدكتور  
حسين كورني  
أستاذ في كلية العلوم بجامعة دمشق

# الميكانيكا والفيزياء

حسين يوسف الكورني

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لمُجَامعة دِمَشق

١٤٠١ - ١٤٠٢ هـ

١٩٨١ - ١٩٨٢ م

الطبعة الجديدة - دمشق

## منهاج

### الميكانيك الفيزيائي

#### فرع العلوم الفيزيائية الكيميائية

#### السنة الثانية من كلية العلوم

#### ثلاث ساعات أسبوعية

- ١ - دراسة تحليلية لقوانين نيوتن  
أ ( مجموعة الجسيمات المادية  
ب ( الجسم الصلب ، تطبيق على الجيروسكوب
- ٢ - الميكانيك التحليلي  
أ ( مبدأ دالمبير  
ب ( معادلات لاغرانج  
ج ( قوانين الانحفاظ
- ٣ - تحريك الجسم الصلب  
أ ( النظريات العامة  
ب ( معادلات أولير  
ج ( زوايا أولير
- ٤ - التصادم والتبعثر ( التشتت )
- ٥ - المعادلات القانونية  
أ ( معادلات هاميلتون  
ب ( الفعل الاصغر  
ج ( التحويلات القانونية

د ( معادلات هاميلتون - جاكوبي  
هـ ( معترضات بواسون  
و ( تابع راوس

#### ٦ - الميكانيك النسبوي

آ ( مبادئ النسبية الخاصة  
ب ( تحويلات لورنتز  
جـ ( تحويلات السرعة والتسارعات  
هـ ( قوانين التحريك النسبوي

هـس إبراهيم الدويهي

\* \* \*

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

## مقدمة

لقد جاء هذا الكتاب حصيلة عمل دام خمسة عشر عاما في تدريس مادة الميكانيك الفيزيائي في جامعتي دمشق والجزائر . وعلى الرغم من الجهود الكبيرة الدأبة التي بذلتها خلال هذه الاعوام في اعداد هذه الحصيلة المتواضعة وتحسينها ، ماكنت لأرضى لها أن تكون كتابا جامعا بشكلها الحالي لولا مساس الحاجة .

وضعت هذا الكتاب في أربعة عشر فصلا وفق منهاج مقرر الميكانيك الفيزيائي في كلتا الجامعتين ، وهو منهاج واحد . وقد تناولت فصوله الاربعة الاولى مراجعة لأسس الميكانيك . ونظرا لما كنت ألمسه من ضعف لدى الكثير من الطلاب في فهم موضوعي الجملة اللاعطالية وحركة الجسيمات المشحونة في الحقول الكهروستاتيكية ، فقد فردت فصلا خاصا لكل من هذين الموضوعين نظرا لاهميتهما الكبرى في الفيزياء .

أما بقية فصول الكتاب فانها تعالج الجزء الاساسي من منهاج هذا المقرر . فيتناول الفصل السابع دراسة حركة المجموعات المادية . ويعالج الفصل الثامن أبحاث الصواريخ والانقسام والاصطدام كتطبيقات على حركة المجموعات المادية . أما الفصل التاسع فيبحث في أساسيات عزوم عطالة الاجسام ، بينما يتناول الفصلان العاشر والحادي عشر دراسة حركة الجسم الصلب .

وقد أولي الميكانيك التحليلي عناية خاصة ، حيث عولجت نظرية لاغرانج في الفصل الثاني عشر كما عولجت نظرية هاملتون في الفصل الثالث عشر . وأما الفصل الرابع عشر والآخر فقد تعرض لمبادئ الميكانيك النسبوي في اطار نظرية النسبية الخاصة ، وأخيرا فقد تضمن هذا الكتاب مجموعة من التمارين والمسائل مبوبة حسب فصوله .

هذا وإنني ، إذ آمل أن يكون هذا الكتاب مصدر عون لطلابي الاعزاء في دراستهم وان يجد فيه زملائي الكرام ، الذين قد يستعملونه في جامعات القطر العربي السوري أو في جامعات الاقطار العربية الشقيقة ، بعض ما يخفف أعباء التدريس عنهم ، أتقدم اليهم جميعا بالرجاء الخالص ألا يعتبروه كتابا خاليا من النقص والعيوب وأن يلتمسوا لي عذرا حيثما يقعون على مواضع النقص والخطأ والزلل فيه . كما أرجو أن يزودوني بملاحظاتهم القيمة ونقدكم البناء .

وانتي لذلك أرحب بكل نقد أو تصويب أو اقتراح يردني من قرائي الاعزاء ليردني الى حيث الصواب .

دمشق ١٩٨٢/١/١

حسن كنيش

## الاهداء

لقد كانت ملاحظتي العلمية المستمرة من قبل المتفوقين من طلابي  
القوى دوافعي على العمل الجاد في تدريس مادة هذا الكتاب واكبر  
مشجعاتي على كتابة محتواه .

فالى تلك النخبة العزيزة من طلابي اهدي هذا الانتاج المتواضع .

حسن كنيش

دمشق ١٩٨٢/١/١

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)





# الفصل الأول

## الميكانيك

### اولياته ومسلماته

- الفيزياء وفروعها التقليدية
- الميكانيك ، اولياته ومسلماته
- اوليات الميكانيك : الزمان والمكان والمادة
- مسلمات الميكانيك : قوانين نيوتن
- جمل المقارنة المطالية
- السرعة والتسارع
- المحاور الذاتية للحركة
- التسارعان المماسي والناظمي
- العمل والاستطاعة والطاقة الحركية
- حقول القوى المحافظة والطاقة الكامنة
- انحفاظ الطاقة
- الاندفاع الخطي والدفع الخطي
- الاندفاع الزاوي والدفع الزاوي
- انحفاظ الاندفاع الخطي والاندفاع الزاوي
- توازن الجسيم المادي
- جمل الواحدات والابعاد



## I — الفيزياء وفروعها التقليدية :

ان في دراسة الفيزياء كثيراً من الاثارة والتحدى للفكر الانساني . ولقد كانت دراسة الفيزياء والتجربات الفيزيائية العلمية ، ولا تزال ، من أكثر فعاليات العقل البشري متعة . ولذلك فقد كانت الفيزياء العلم الذي جذب اهتمام الانسان وشغله خلال العصور السحيقة من تاريخه الطويل . لقد أتت كلمة « الفيزياء » من اليونانية ومعناها « الطبيعة » . ولهذا « فالفيزياء علم يكرس لدراسة جميع مظاهر وظواهر الطبيعة » . كان هذا مفهوم الفيزياء حتى أوائل القرن التاسع عشر وكان يطلق عليها أحيانا اسم « فلسفة الطبيعة » . إلا أن الفيزياء منذ القرن التاسع عشر وحتى وقت قريب اقتصرت على معالجة مجموعة محدودة من الظواهر الطبيعية دعيت « بالظواهر الفيزيائية » واشتملت على الحوادث التي لا تتغير أثناءها طبيعة العناصر أو المركبات المادية المشتركة فيها . بعد ذلك راح الجميع يتعدون شيئاً فشيئاً بالفيزياء عن هذا المفهوم الاشوه غائدين بهذا العلم الى مفهومه وشموله الاساسيين . ويمكننا أن نقول اليوم ان الفيزياء علم غايته دراسة عناصر الطبيعة وتفاعلاتها . ومن خلال هذه التفاعلات وبدلالة نتائجها يستطيع الفيزيائي أن يمين خواص المادة وأن يفسر الظواهر الطبيعية التي يلاحظها .

إن طموح الانسان وحبه انقراطي للاطلاع والمعرفة دفعا به منذ القديم ولا يزالان يدفعان به الى إظهار فضول علمي مستمر لمعرفة « كيف تعمل الطبيعة » و « كيف يسخرها لخدمته ومصلحته » .

ولقد كانت حواسه ، بادىء الأمر ، المصدر الوحيد الذي يقدم له المعلومات عن الطبيعة وعن حوادثها ، ولذلك فقد درج على تصنيف الحوادث الطبيعية « الفيزيائية » تصنيفاً أساسه الحواس . فالنور أو الضوء يتصل بحاسة الابصار ، والصوت بحاسة السمع ، والحرارة بحاسة اللمس . وهكذا . . . . وأما نشوء العلوم الفيزيائية وظهورها فقد كان أمراً تابعاً لمدى سهولة ملاحظة الحوادث التي تشتمل عليها . فلقد كانت حركة الاجسام أبرز ظاهرة أو حادثة يمكن أن تلاحظ وترصد بصورة مباشرة ، ولذا كان علم الميكانيك أول فرع من فروع الفيزياء ظهر كعلم متميز في حين أن علم الكهربية الذي لا يتصل مباشرة بحاسة من الحواس لم يظهر كعلم منظم حتى القرن التاسع عشر . وهكذا كانت فيزياء القرن التاسع عشر مقسمة الى خمسة فروع تطلق عليها صفة التقليدية وهي :

- ١ - الميكانيك
- ٢ - الضوء
- ٣ - الحرارة
- ٤ - الصوت
- ٥ - الكهربية

بقيت الفيزياء على هذا التصنيف وعولجت حسبه حتى أوائل القرن العشرين حين تبلور فرع جديد للفيزياء وأضيف الى الفروع الخمسة السابقة . ونظراً لحدثة عهده بالنسبة لبقية الفروع فقد دعي هذا الفرع بـ « الفيزياء الحديثة » ، وهي التي اشتملت على التطورات الفيزيائية التي تمت خلال هذا القرن .

ان الفروع التقليدية للفيزياء كانت ولا تزال وستبقى أساساً هامة لا غنى عنها للفيزياء . والتفريق بينها على النحو السابق واعتبارها علوماً مستقلة أمر فقد معناه وأضحت أجزاء من كل ، ينظر اليها

بمنظار جديد صنعته تطورات فيزياء القرن العشرين المذهلة • إننا الآن لا نفرق بين تقليدي الفيزياء وحديثها ولا بين فرع وآخر من فروعها بل ننظر اليها كلها كعلم واحد يتكامل يوماً بعد يوم ليشكل وحدة رائعة من المعرفة تعالج بطرق منطقية ومنسجمة • وأخيراً ، لننميزنا اليوم بين فروع الفيزياء في دراستنا فليس ذلك إيماناً منا بوجود الفصل والتفريق بل سعياً وراء تبسيط العرض وسهولة التعلم •

## II - الميكانيك وأوليائه ومسلّماته :

الميكانيك ، بقصد التبسيط لا بقصد الفصل والتمييز ، هو ذلك الفرع من الفيزياء الذي يهتم بدراسة تغيز مواضع الاجسام • ويضم ثلاثة مواضيع هي :

- الحركة : وتهتم بدراسة الهندسة الحركية .
- التحريك : وهو يربط بين الحركة وأسبابها •
- التوازن : ويعالج شروط انعدام الحركة •

ويقوم الميكانيك ، كغيره من العلوم ، على العناصر التالية التي تشكل أسس الميكانيك الافتراضية وتبنى منها طرق معالجته ودراسة الحوادث التي يشتمل عليها :

### ٢ - الاوليات :

وهي مفاهيم غير معرفة وجودها أمر حتمي لأن أي تعريف لا بد وأن يصاغ بدلالة مفهوم آخر أو مفاهيم أخرى • فمن الواضح أنه لا بد من البدء بمفاهيم نعيمها ونفهمها ولها مدلولاتها بالنسبة لنا إلا أننا لا نستطيع تعريفها • فمفهوم النقطة ومفهوم الخط مثلاً في هندسة إقليدس هما مفهومان أوليان غير معرفين • ويشكل الزمان والمكان والمادة أوليات علم الميكانيك •

## ب — التعاريف :

وهي مفاهيم معرفة تعتمد في تعريفها علي مفاهيم أخرى أولية أو معرفة • فالسرعة والتسارع والعمل والكمون مثلاً مقادير أو مفاهيم نعرفها بدلالة مفاهيم أخرى •

## ح — المسلمات :

والمسلمات أفكار وأحكام أساسية قد تأخذ أشكالاً رياضية توضع على شكل فرضية غير مبرهنة يؤمل من تطبيقها الوصول إلى إيضاح وتفسير وتعليل بعض الظواهر بصورة صحيحة • إن وضع مثل هذه الفرضيات والتأكد أحياناً من صحتها أمر غالباً ما تقود إليه الملاحظات التجريبية أو التأملات العلمية العميقة • قوانين نيوتن هي مسلمات الميكانيك •

## د — النظريات :

وهي فرضيات مبرهنة وتعتمد في برهانها على المسلمات والتعاريف • وسنرى في هذا الكتاب عدداً كبيراً جداً من النظريات في الميكانيك • لكننا نود التوقف عند أوليات ومسلمات علم الميكانيك •

## III - أوليات الميكانيك - الزمان والمكان والمادة :

لقد كونا من خلال تجاربنا اليومية معاني لمفاهيم الزمان والمكان والمادة إلا أنه يتعذر علينا صياغة تعاريف دقيقة لهذه المفاهيم • ولذلك فنحن نعتبرها أوليات غير معرفة رغم أننا نفهمها وندرك مدلولاتها • لقد كونا معنى لمفهوم الزمان من خلال خبرتنا حول وقوع حادث قبل أو بعد حادث آخر • ومفهوم المكان مرتبط بمفاهيم النقطة والموضع والاتجاه والانتقال • ونحن نفهم المقصود منه دون مقدرة على تفسير فهمنا هذا • وأما مفهوم المادة فمرتبط بفكرة تشكل الاجسام من قطع

أو أجزاء صغيرة ، فهو إذن مرتبط بمفهوم الجسيم المادي كنقطة تشغلها المادة ، ومقدار المادة اللازمة للجسيم هي كتلة ذلك الجسيم . ولعل مفاهيم الزمان والمكان والمادة من أهم الأوليات لا في الميكانيك وحسب بل بالنسبة لعلم الفيزياء كله .

#### IV — مسلمات الميكانيك — قوانين نيوتن :

يعد السير إسحق نيوتن مؤسس علم الميكانيك الذي يسمى باسمه « الميكانيك النيوتني » وذلك لأنه وضع المسلمات الأساسية التي ارتكز عليها هذا العلم . وتتلخص هذه المسلمات بقوانينه الثلاثة التي وضعها في نهاية القرن السابع عشر .

##### ١ — قانون نيوتن الاول :

ينص هذا القانون على أن الجسم المتحرك لا يغير حالته الحركية ما لم يخضع لقوة خارجية . فإذا لم يخضع لمثل هذه القوة أو إذا زال عنه تأثيرها وكان ساكناً فانه يبقى ساكناً وإذا كان متحركاً حافظ على حركة منتظمة . ويسمى هذا القانون « مبدأ العطالة » ، والجدير بالذكر أن هذا القانون مثالي إذ أن من المستحيل عزل أي جسيم عن تأثير أية قوة خارجية ما لم يكن هذا الجسيم وحده في الفراغ وهو أمر مستحيل . وتطبيق هذا القانون أمر تقريبي ولا ريب .

##### ب — قانون نيوتن الثاني :

فحوى هذا القانون أنه إذا كان الجسيم متحركاً بسرعة  $\vec{v}$  وبالتالي متمماً باندفاع خطي قدره  $\vec{p} = m \vec{v}$  فانه يكون خاضعاً لقوة مساوية الى المشتق الزمني لهذا الاندفاع الخطي أي :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1)$$

وإذا كانت الكتلة  $m$  ثابتة أثناء الحركة أخذ هذا القانون الشكل الذي نألفه كثيراً وهو :

$$\vec{F} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = m \vec{a} \quad (2)$$

حيث  $\vec{a}$  هو تسارع الجسم • ومعنى هذا أن القوة المؤثرة على الجسم تساوي جداء كتلته بالتسارع الذي تنتجه هذه القوة • ويعرف هذا القانون عادة « بمبدأ التحريك » •

### ج - قانون نيوتن الثالث :

ينص هذا القانون على أنه إذا أثر الجسم  $P_1$  على جسم آخر  $P_2$  بقوة  $\vec{F}_{1,2}$  فإن الجسم الثاني  $P_2$  يؤثر على الأول  $P_1$  بقوة  $\vec{F}_{2,1}$  تساوي  $\vec{F}_{1,2}$  بالشدة وتعاكسها بالاتجاه • أي أن :

$$\vec{F}_{2,1} = - \vec{F}_{1,2} \quad (3)$$

ويسمى هذا القانون « مبدأ رد الفعل » ويعني أن لكل فعل رد فعل يعاكسه مباشرة •

### V — جمل المقارنة العطالية :

ان قوانين نيوتن الثلاثة التي أتينا على ذكرها لا تصح إلا في جملة مقارنة ثابتة في الفراغ المطلق أو في جملة تتحرك فيه حركة مستقيمة منتظمة • تدعى هذه الجملة « جملة عطالية » أو « جملة غاليلية » نسبة الى غاليليه • جميع الجمل الأخرى التي لا تحقق هذه الصفة تدعى « جملا لاعطالية » ولا يصح تطبيق قوانين نيوتن فيها • إن جملة المقارنة المتناسكة مع الأرض هي خير مثال على الجملة اللاعطالية وذلك لأنها تتحرك حركة دورانية حول نفسها وحول الشمس ولذلك فإن حركتها غير منتظمة ( متغيرة السرعة ) •



أما الجملة الثابتة في الفراغ المطلق فانها تبقى فكرة في الذهن دون أن تتحقق من وجودها . ذلك لأن جميع التجارب التي نجريها في المخبر لا تميز بين الجملة العطالية والجملة الثابتة ثباتاً مطلقاً ، فلا تستطيع إذن أن تكشف عن الجملة الثابتة . وأما جملة كوبرنيك التي مركزها منطبق على مركز كتلة المجموعة الشمسية ومحاورها تتجه نحو نجوم "ثابتة" فإن اعتبارها جملة ثابتة أمر عار عن الصحة ، إذ ليس هناك نجوم ثابتة في الفراغ ثباتاً مطلقاً فالكون المطلق لا يمكن أن يتحقق ، كما أن مركز كتلة المجموعة الشمسية أو أية مجموعة شمسية أو فلكية أخرى لا يمكن أن يكون ثابتاً ( ساكناً ) في الفراغ . ولو وجد نجم ساكن في الفراغ لكان هذا النجم حسب قانون نيوتن معزولاً تماماً عن تأثير النجوم الأخرى والكواكب والأجرام السماوية وغيرها . وهذا أمر مستحيل لوجود قوى تجاذب بين العناصر المادية المؤلفة للكون .

فوق ذلك كله فإن ما يترأى لنا من امكانية الحصول على جملة مقارنة عطالية أمر لا يتعدى الوهم ، لأن قوى التجاذب بين عناصر الكون تحول دون تحقق الحركة المستقيمة المنتظمة لتلك الجملة . وبالتالي لا نجد جملة مادية عطالية في هذا الكون الشاسع . وتبقى فكرة الجملة العطالية فكرة مثالية والجملة العطالية جملة وهمية تصورية . والذي نستعمله كجمل عطالية هو تحقيق تقريبي للفكرة المثالية . فهناك جمل عطالية بصورة تقريبية . ولا نستطيع استعمال هذا التقريب إلا عندما يكون تأثير اللاعطالية على الحوادث الميكانيكية المدروسة ضعيفاً . وسنفرد فيما بعد بحثاً خاصاً للحركة في جمل لا عطالية .

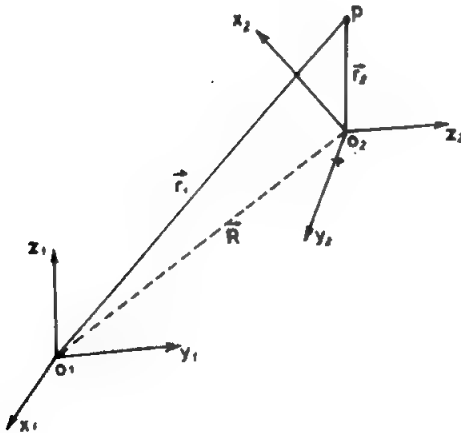
لنعد الآن الى قانون نيوتن الثاني . ان صحة هذا القانون في جملة عطالية ما يدل على أن القوة المؤثرة على الجسم المتحرك اذا

قيست في جملتين عطاليتين يكون لها قياس واحد ، أي ، أن القوة واحدة في جميع الجمل العطالية ، ولذلك نسميها بالقوى العطالية . وهذا يكافئ أن للجسيم تسارعا واحدا في أية جملة عطالية . وبيان ذلك يمكن أن نبين أنه إذا كان  $\vec{a}_1$  و  $\vec{a}_2$  تسارعي الجسيم بالنسبة للجملتين العطاليتين  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  و  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  بالترتيب فإن  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$  . بما أن الجملتين عطاليتان فإن حركة إحداها منتظمة بالنسبة للآخرى . ويتعين لذلك موضع الثانية بالنسبة للاولى بشعاع موضع  $O_2$  بالنسبة لـ  $O_1$  . ويتعين موضعا الجسيم المتحرك بالنسبة للجملتين بشعاعي موضع الجسيم بالنسبة لـ  $O_1$  و  $O_2$  . وهذه الاشعة هي بالترتيب :

$$\vec{R} = \vec{O_1 O_2}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{O_1 P}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{O_2 P}$$



الشكل (1)

ولحساب التسارع  $\vec{a}_1$  في الجملة الأولى نأخذ المشتق الثاني لشعاع الموضع في تلك الجملة بالنسبة للزمن . انظر الشكل ( 1 ) .

$$\begin{aligned}\vec{O_1P} &= \vec{O_1O_2} + \vec{O_2P} \\ \vec{r_1} &= \vec{R} + \vec{r_2} \\ \frac{d^2 \vec{r_1}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r_2}}{dt^2} \\ \vec{a_1} &= \vec{a_2}\end{aligned}\quad (4)$$

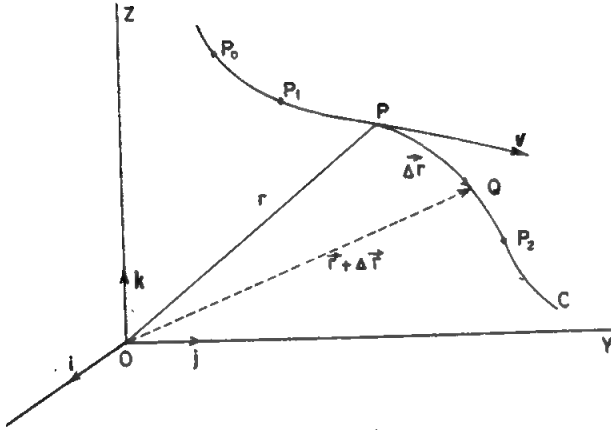
حيث  $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0$  ومشتقا  $\vec{r_2}$  و  $\vec{r_1}$  هما التسارعان  $\vec{a_2}$  و  $\vec{a_1}$  . إذن فللمتحرك تسارع واحد في أية جملة عطالية . وهذا يؤدي الى ان القوة المؤثرة عليه واحدة في أية جملة عطالية أيضاً . فاذا قاس مجموعة من المراقبين ( كل منهم في جملة عطالية مختلفة ) تسارع جسيم متحرك والقوة المؤثرة عليه فانهم جميعاً يحصلون على النتيجة نفسها . وهذا ما يعرف أحياناً بالبدا التقليدية للميكانيك النسبي .

قبل الشروع بدراسات تفصيلية في الميكانيك لا بد لنا من مراجعة سريعة لبعض النقاط الأساسية التي تشكل الادوات الاولى لهذه الدراسات من جهة والتي تمهد لهذه الدراسات التفصيلية من جهة أخرى . وتعلق هذه النقاط بالمقادير الحركية والتحريكية المرتبطة بحركة وتحريك الاجسام المادية الصغيرة التي نطلق عليها اسم « الجسيمات المادية » أو « النقاط المادية » . وسوف نمم ذلك في حينه على مجموعات أو أجسام مادية مؤلفة من جسيمات أو من اجسام متماسكة أو غير متماسكة .

## VI — السرعة والتسارع :

ليكن الجسيم المادي المتحرك على منحنى C كما في الشكل ( 2 )

ولتكن P و Q وضي الجسم في اللحظتين الزمنية  $t$  و  $t + \Delta t$  بالترتيب .



الشكل (2)

وليكن أيضاً :

$$\vec{OP} = \vec{r}(t) = \vec{r}$$

$$\vec{OQ} = \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r} + \Delta \vec{r}$$

شعاعي موضع الجسم المتحرك في وضعية P و Q . نعرف السرعة الشعاعية الوسطية للجسم بين الوضعتين P و Q بالمقدار :

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (5)$$

والسرعة الشعاعية الآنية في الموضع P بالمقدار :

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{d t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (6)$$

ويجدر بنا ان نلاحظ انه عندما تنتهي  $\Delta t$  الى الصفر فان  $\Delta \vec{r}$  تنتهي إلى الصفر ايضاً وبالتالي تنطبق Q على P . وتكون السرعة الآنية شعاعاً مماساً للمسار C في النقطة P . فالسرعة الشعاعية الآنية المغطاة بالعلاقة (6) هي إذن سرعة الجسم المتحرك في لحظة مروره بالموضع P . وتعطى هذه السرعة تحليلياً بالعلاقة :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (7)$$

حيث  $x, y, z$  هي احداثيات P التابعة للزمن بصورة عامة وحيث  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  هي جملة أشعة الواحدة على الثلاثية المتعامدة  $oxyz$  . وأخيراً تعرف السرعة الخطية بأنها طولية السرعة الشعاعية . فهناك اذن سرعتان خطيتان ، وسطية وآنية ، وتعطيان بالترتيب بالعلاقين :

$$v_s = |\vec{v}_s| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \quad (8)$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \quad (9)$$

حيث  $s$  هي طول القوس على المسار مقاساً من نقطة ثابتة مثل  $P_0$  حتى النقطة P .

يتبين لنا مما سبق ان السرعة مغطاة بنسبة تغير الموضع الى تغير الزمن . والسرعة بصورة عامة ليست ثابتة بل متغيرة مع الزمن ، ولمعرفة نوعية هذا التغير نحسب نسبة تغير السرعة بدلالة الزمن ونسمي هذه النسبة بالتسارع . وتعطى بالعلاقة :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (10)$$

وهي مكافئة للعلاقة :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \quad (11)$$

ولقد رأينا ان السرعة محمولة على مماس المسار في حين ان ذلك لا ينطبق على التسارع في الحالة العامة ، وسنرى ذلك بالتفصيل بمد قليل .

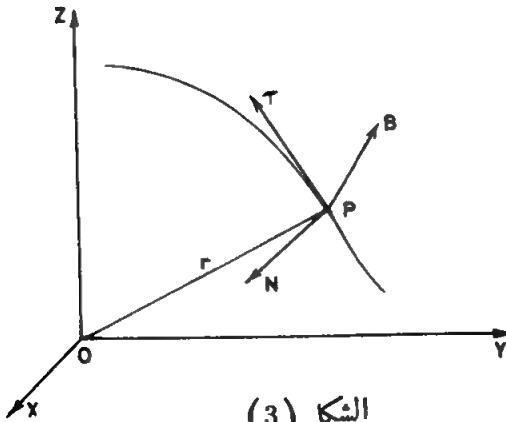
## VII — الثلاثة المتحركة ( المحاور الذاتية للحركة ) :

يمكننا ان نكتب السرعة الشعاعية الآتية على الشكل التالي :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (12)$$

ولما كانت السرعة محمولة على المماس وكانت قيمتها العددية  $v$  فانه ينتج من العلاقة (12) ان

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (13)$$



هو شعاع محمول على المماس وطوله الواحدة ويسمى لذلك بـ « شعاع واحدة المماس » .

ان طولية الشعاع  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  تسمى بـ تقوس المنحني C . وهذا الشعاع متعامد

مع شعاع واجدة المماس  $\vec{T}$  . وبالتالي يمكن ان نكتب :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k \vec{N} \quad (14)$$

حيث نسمي  $\vec{N}$  « شعاع واحدة الناظم » ونسمي k « تقوس المنحني » C ومقلوبه  $R = 1/k$  « نصف قطر تقوس هذا المنحني » ، وذلك كله في الموضع P .

ولما كان  $\vec{T}$  و  $\vec{N}$  متعامدين فان جداءهما :

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \quad (15)$$

يمثل شعاع واحدة متعامد مع كل من  $\vec{T}$  و  $\vec{N}$  ونسميه « شعاع واحدة ثنائي الناظم » . انظر الشكل (3) .

تشكل الأشعة  $\vec{T}$  و  $\vec{N}$  و  $\vec{B}$  ثلاثية طردية قائمة متحرك مع النقطة P على المنحني C ، ونسمى لذلك « بالثلاثية المتحركة » ، كما يمكن تسميتها « بالمحاور الذاتية لحركة النقطة P على المنحني C » . واخيراً فان إسقاط معادلة الحركة (وهي قانون نيوتن الثاني) على الثلاثية المتحركة يعطينا ما يسمى « بالمعادلات الذاتية الحركة » .

## VIII — التسارعان المماسي والناظمي :

يمكن ان نبين بسهولة ان للتسارع الشعاعي مركبتين احدهما محمولة على

المماس وتسمى « بالتسارع المماسي » وهي ممطاة بالملاقة :

$$a_t = \frac{d v}{d t} \quad (16)$$

والأخرى محمولة على الناظم وتسمى « بالتسارع الناظمي » وهي ممطاة بالملاقة

$$a_n = v^2 k = v^2 \cdot R \quad (17)$$

ويمكن ان نبرهن على صحة ما تقدم انطلاقاً من الملاقة  $\vec{v} = v \vec{T}$  واشتقاقها بالنسبة للزمن .

### IX — العمل والاستطاعة والطاقة الحركية :

إذا انتقل جسيم مادي انتقالاً عنصرياً  $d \vec{r}$  بتأثير قوة  $\vec{F}$  فإن هذه القوة التي تؤثر عليه اثناء الحركة تكون قد قامت بعمل عنصري قدره

$$d W = \vec{F} \cdot d \vec{r} \quad (18)$$

والعمل الكلي الذي تقوم به القوة عندما تحرك الجسيم من موضع ما  $P_1$  إلى موضع آخر  $P_2$  هو :

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d \vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d \vec{r} \quad (19)$$

ان نسبة تغير العمل إلى تغير الزمن يسمى بالاستطاعة أي :

$$P = \frac{d W}{d t} = \frac{\vec{F} \cdot d \vec{r}}{d t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (20)$$

ان العمل الذي تبذله القوة  $\vec{F}$  عندما تحرك الجسيم من  $P_1$  إلى  $P_2$  هو



$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (21)$$

حيث  $\vec{v}_2$  و  $\vec{v}_1$  السرعتان المقابلتان لشعاعي الموضع  $\vec{r}_2$  و  $\vec{r}_1$  في الموضعين  $P_2$  و  $P_1$  وذلك على الترتيب . فإذا سمينا

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (22)$$

بالطاقة الحركية أمكننا ان نكتب العلاقة (21) من جديد على الشكل :

$$W = T_2 - T_1 \quad (23)$$

أي ان العمل الذي تقوم به القوة ، عندما تنقل الجسم من موضع أول إلى موضع ثالث ، يساوي الفرق بين الطاقة الحركية للجسم في الموضع الثاني وطاقته الحركية في الموضع الأول .

### X — حقول القوى المحافظة والطاقة الكامنة :

يقال عن الفراغ او جزء منه انه يشكل حقل قوى فيما إذا وافقت كل نقطة P منه قوة معلومة  $\vec{F}(P)$  . ويقال عن حقل القوة ( او القوة نفسها ) انه مشتق من ككون اذا وجد تابع مثل  $U = U(P)$  ، نسميه تابع الككون ، يحقق العلاقة :

$$\vec{F}(P) = - \vec{\nabla} U = - \text{Grad } U \quad (24)$$

نظرية (1) : إذا تحرك جسم على منحنى C من موضع  $P_1$  إلى آخر  $P_2$  تحت تأثير قوة مشتقة من ككون كان العمل المنجز مستقلاً عن الطريق المتبع بين  $P_1$  و  $P_2$  . ويقال في هذه الحال ان حقل القوى  $\vec{F}$  محافظ ، أو ان القوة  $\vec{F}$  محافظة .

ولبرهان ذلك نحسب العمل كما يلي :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) \\
 &= - \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \\
 &= - \int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_1) - U(P_2) \quad (25)
 \end{aligned}$$

وتسدل هذه النتيجة على ان العمل  $W$  لا يتعلق إلا بقيمتي التابع  $U$  في الموضعين  $P_1$  و  $P_2$  ولا يتعلق بصورة خاصة بالطريق السلوك من قبل الجسم .  
 نظرية (2) : إذا كان حقل القوى  $\vec{F}$  مشتقاً من ككون  $U(x, y, z)$  كان دوار  $\vec{F}$  معدوماً . أي

$$\text{Curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \quad (26)$$

ليان ذلك نكتب دوار  $\vec{F}$  كما يلي

$$\begin{aligned}
 \text{Curl } \vec{F} &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \\
 &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge \left( -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} \\
 &\quad + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right) \vec{k}
 \end{aligned}$$

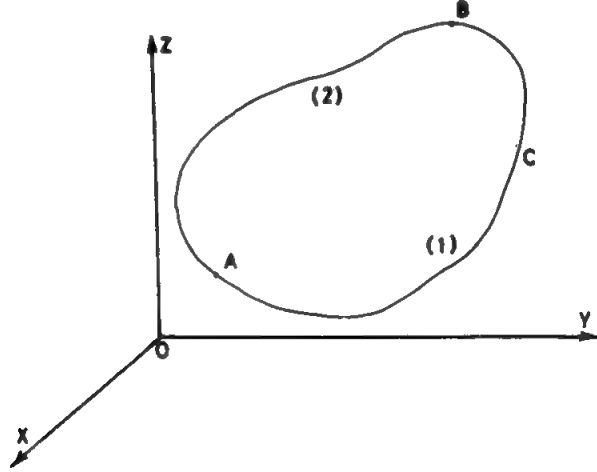
ولما كان ترتيب الاشتقاق لا يغير المشتق فإن كلا من الأقواس الموجودة في العلاقة الأخيرة معدوم ، وبالتالي تنتج العلاقة (26) .

نظرية (3) : إذا كان الحقل  $\vec{F}$  مشتقاً من كيون  $U(x, y, z)$  كان العمل الذي تنجزه القوة  $\vec{F}$  خلال حركة الجسم الخاضع لها على منحن مغلق  $C$  كالين في الشكل (4) معدوماً . أي

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (27)$$

يمكننا ، حسب الشكل (4) ، أن نكتب التكامل الوارد في المعادلة (27) كما يلي

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (28)$$



الشكل (4)

حيث يجرى التكامل الاول من A إلى B على الفرع (1) وينجز التكامل الثاني من B إلى A على الفرع (2) . ولقد رأينا في المعادلة (25) ان كلا

من مثل هذين التكاملين لا يتعلق إلا بقيمتي تابع الكون في بداية ونهاية المنحنى الذي يجري عليه التكامل . واستناداً إلى ذلك فإن

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(A) - U(B) \text{ و } \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \quad (29)$$

والتعويض المباشر من المعادلتين (29) في المعادلة (28) يبين ان العلاقة (27) صحيحة .

يسمى التابع  $U(P)$  بتابع الكون في الموضع  $P$  . أما ما ندعوه بالطاقة الكامنة في  $P$  فيعرف بأنه مقدار العمل الذي تقوم به القوة  $\vec{F}$  عندما ينتقل الجسم الخاضع لها ( أي نقطة تأثيرها ) من الموضع  $P$  إلى موضع آخر  $P_0$  نعتبره مبدأ المقارنة أو ، كما نقول ، مبدأ للكون . وتمطى هذه الطاقة اذن بالعلاقة

$$V(P) = \int_P^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_0) - U(P) \quad (30)$$

### XI — انحفاظ الطاقة :

لنفرض ان الجسم ينتقل من موضع اول  $P_1$  الى موضع ثان  $P_2$  خاضعاً لحقل قوى مركزي  $\vec{F}$  كما يبين الشكل (2) . ولنحسب العمل الذي تنجزه القوة  $\vec{F}$  خلال هذا الانتقال بدلالة الكون .

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_1) - U(P_2) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &= U(P_1) - U(P_0) - U(P_2) + U(P_0) \\ &= V(P_1) - V(P_2) = V_1 - V_2 \end{aligned} \quad (32)$$

أي ان هذا العمل يساوي تناقص الطاقة الكامنة لدى هذا الانتقال .  
ولقد رأينا سابقاً أن هذا العمل يعطى بزيادة الطاقة الحركية الناجمة  
عن هذا الانتقال ، كما تشير العلاقة (23) . ونستنتج من العلاقتين (23)  
و (32) أن

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

أو ان

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (33)$$

وهذا يشير الى أن مجموع الطاقين الحركية والكامنة

$$E = T + V \quad (34)$$

وهو ما ندعوه بالطاقة الكلية ، يبقى محافظاً على قيمته لدى الانتقال من موضع  
الى آخر . ونعبر عن ذلك بقولنا « ان الطاقة الكلية للجسيم الخاضع لحقل  
مشتق من كموت هي طاقة محافظة او مصونة » .

## XII — الاندفاع الخطي والدفع الخطي :

اذا كان الجسيم ذو الكتلة  $m$  متحركاً بسرعة  $\vec{v}$  تحت تأثير قوة  $\vec{F}$

فاننا نسمي جداء كتلته بسرعته بالاندفاع الخطي  $\vec{p}$  أي

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (35)$$

واذا كانت  $P_1$  و  $\vec{v}_1$  موضع الجسيم وسرعته في لحظة ما  $t_1$  وكانت  $P_2$  و  $\vec{v}_2$   
موضعه وسرعته في لحظة أخرى  $t_2$  فاننا نعرف الدفع الخطي للقوة المؤثرة  
عليه بين هاتين اللحظتين بالتكامل التالي

$$\vec{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt \quad (36)$$

وزى بسهولة تامة أن

$$\begin{aligned}\vec{J}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m d\vec{v} \\ &= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1\end{aligned}\quad (37)$$

أى أن دفع القوة  $\vec{F}$  بين  $t_1$  و  $t_2$  يساوي تزايد الاندفاع الخطي بينهما للجسيم الخاضع لهذه القوة . انظر الشكل (5) .

### XIII — الاندفاع الزاوي والدفع الزاوي :

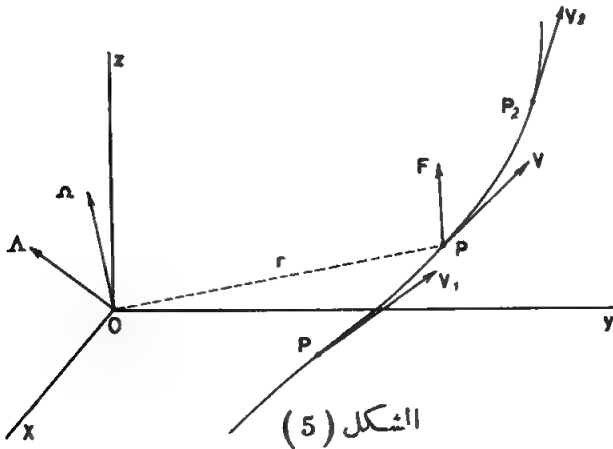
ان عزم القوة  $\vec{F}$  حول نقطة ما وتكن مبدأ الاحداثيات هو الجداء الشعاعي لهذه القوة بشعاع الموضع . أي

$$\vec{\Lambda} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (38)$$

أما ما نسميه الاندفاع الزاوي فهو عزم الاندفاع الخطي أي

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (39)$$

ويمكن أن نتبين بسهولة وبلاشتقاق المباشر للاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  بالنسبة للزمن



ان هذا المشتق يساوي عزم القوة المؤثرة . أي

$$\vec{\Lambda} = \frac{d \vec{\Omega}}{d t} \quad (40)$$

وهذا ما يعرف ببدا الاندفاع الزاوي . ويتمتع هذا المبدأ بأهمية خاصة في التحريك . وهو يقوم مقام قانون نيوتن الثاني في كثير من التطبيقات ، وبصورة خاصة عندما نممه فيما بعد على تحريك المجموعات المادية .  
نعرف مقداراً آخر وهو الدفع الزاوي بين اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  بأنه

$$\vec{J}_\omega = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda} d t \quad (41)$$

وإذا استعملنا العلاقة (40) في العلاقة (41) وانجزنا الحساب وجدنا أن

$$\vec{J}_\omega = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d \vec{\Omega}}{d t} d t = \int_{t_1}^{t_2} d \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 \quad (42)$$

وبدل ذلك على أن الدفع الزاوي بين اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  يساوي تزايد الاندفاع الزاوي بينها .

#### XIV — انحفاظ الاندفاع الخطي والاندفاع الزاوي :

في الحالة الخاصة عندما تكون القوة  $\vec{F}$  المؤثرة على الجسم معروفة خلال حركته فان قانون نيوتن الثاني يبين أن

$$\frac{d \vec{p}}{d t} = \vec{F} = 0$$

أي ان

$$\vec{p} = m \vec{v} = \text{const} \quad (43)$$

ونقول في هذه الحالة ان الاندفاع الخطي محافظ . كما ان الدفع يكون معدوماً في هذه الحالة . ويبدو ذلك واضحاً بالمودة إلى إحدى الملاقين (36) و (37) ، حيث  $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$  .

أما في الحالة الخاصة التي توافق انعدام الزخم  $\vec{A}$  ، إما لانعدام القوة  $\vec{F}$  أو لكونها محمولة على شعاع الموضع ، فان العلاقة (40) تبين أن

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = \text{const} \quad (44)$$

ونقول عندئذ ان الاندفاع الزاوي محافظ . ثم ان المودة إلى إحدى الملاقين (41) و (42) تبين ان الدفع الزاوي معدوم ، حيث  $\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_1$  .

#### XV — توازن الجسيم المادي :

إن السكون أو التوازن حالة خاصة وهامة من حالات حركة الأجسام . ولكي يتوازن جسيم ما يجب ألا يكون خاضعاً لأي سبب يفسر موضعه . وبما أن القوة هي السبب في تحريك الأجسام فاننا نرى أن انعدام القوة لا بد منه لتوازن الجسيم . ولكننا نلاحظ أن انعدام القوة ليس كافياً للتوازن (للسكون) لأن الجسم المتحرك دون أن يخضع لقوة يتابع حركته حسب مبدأ العطالة . ولهذا فان شرط توازنه يتضمن انعدام سرعته في موضع التوازن . لذلك كله نقول إنه لكي يتوازن (يسكن) الجسيم في موضع ما يجب أن تكون القوة المؤثرة عليه في ذلك الموضع معدومة وأن تكون سرعته في ذلك الموضع معدومة أيضاً . أي :

$$\vec{F} = 0 \quad \text{و} \quad \vec{v} = 0 \quad (45)$$

عندما تكون القوة مشتقة من كمون  $U$  فان الشق الأول (المتعلق بالقوة) من شرط التوازن يأخذ شكلاً جديداً هو انعدام مشتقات الكون



من المرتبة الأولى في موضع التوازن . أي

$$\vec{\nabla} U = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (46)$$

نقول عن التوازن انه مستقر فيما إذا أزعنا الجسم عن موضع توازنه إزاحة صغيرة جداً وعاد إلى مكان توازنه . ففي الموضع الجديد الذي تزيح الجسم إليه تصبح القوة غير معدومة وتحرك الجسم إلى موضعه السابق . وهذا يدل على أن لهذه القوة في المكان الجديد كمون يفعل في الجسم فيرجعه إلى مكانه . وما تقدم من القول يعني أن قيم الكون في الموضع أو النقاط المجاورة لموضع التوازن أكبر من قيمته في موضع التوازن ، أي أن الكون يكون أصغرياً في موضع التوازن المستقر . ونعبر عن ذلك بانعدام مشتقات الكون من المرتبة الأولى وبكون المشتقات الثانية موجبة . إذن يحصل التوازن إذا تحقق الشرط (46) ويكون مستقراً إذا كان

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0 \quad (47)$$

وفيها عدا ذلك يكون التوازن قلقاً ، أي غير مستقر .  
وهناك حالات يكون فيها التوازن مستقراً بالنسبة لاحدى الاحداثيات وقلقاً بالنسبة للاحداثي آخر . فإذا كان مثلاً

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} < 0$$

فان التوازن مستقر بالنسبة للاحداثي y وقلق بالنسبة للاحداثيين x و z .

## XVI - جمل الواحدات والابعاد :

لقد تراضنا سابقاً الى الطول والكتلة والزمن كمقايير رئيسية واساسية في الميكانيك . يقاس كل واحد من هذه المقايير بواحدة ما . إلا أن تعيين هذه الواحدة أمر اختياري بحت . فيمكننا مثلاً ان نقيس طول الطاولة ونقول انه مساو الى ستة اشبار او خمسة اقدام او مائة وخمسين سانتيمتراً

وهكذا ... اي اننا استعملنا واحداث مختلفة للقياس في الشبر والقدم والساتيمتر . وحتى يكون القياس ثابتاً من مكان لآخر ومن شخص لآخر لا بد من اختيار واحداث ثابتة للقياس تبقى في نفسها في كل مكان وزمان ولدى كل انسان . وتبرز هنا لذلك فكرة اختيار مقاييس وواحداث عيارية . فاختيارنا في القياس السابق الساتيمتر وحدة للقياس يبدو حقاً اختياراً موفقاً ، في حين ان اختيار الشبر او القدم ( القدم البشري ) يفشل في تحقيق هدفنا لاختلاف الشبر والقدم من شخص لآخر .

في الميكانيك ، وفي الفيزياء بصورة عامة ، مقادير كثيرة كلها تحتاج الى قياس وبالتالي الى اختيار واحداث معينة ثابتة لهذا القياس . ويدولأول وهلة ان علينا أن نختار واحدة لكل مقدار فيزيائي بنض النظر عما اخترناه من واحداث للمقادير الأخرى . ولكن هذا غير صحيح لأن المقادير الفيزيائية مرتبطة ببعضها بواسطة علاقات رياضية معينة ، وذلك مايجعل بعض المقادير تشتق (تحسب) من مقادير أخرى ، وبالتالي فان بعض الواحدات تشتق من واحداث أخرى . وحقيقة الأمر ان هناك عدداً معيناً من المقادير الفيزيائية المستقلة بعضها عن بعض حيث لا يؤثر اختيار واحدة لأحدها على اختيار واحداث المقادير الأخرى . فالطول والكتلة والزمن في الميكانيك مقادير لا تمت الى بعضها بأية صلة واختلاف احدها لا يؤدي الى تغير الآخر . وبمباراة أخرى ليس هناك من علاقة او قانون يربط الكتلة بالطول او الزمن . لذلك كله يمكننا أن نعتبر هذه المقادير مستقلة عن بعضها ونسميها «مقادير اساسية» . وانتقاء واحدة قياس لكل منها يتم باستقلال تام عن اختيار واحدتي المقدارين الآخرين . ونسمي واحداث هذه المقادير الأساسية «بالواحدات الأساسية» . أما بقية المقادير الميكانيكية والتي ترتبط بالمقادير الأساسية بواسطة علاقات رياضية ذات معان فيزيائية معينة فيمكن حسابها او اشتقاقها من المقادير الأساسية عن طريق هذه العلاقات . ولذا نسميها

« بالمقادير المشتقة » . أما واحدها ، فبالرغم من اعطائها اسماء معينة ، فلها ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالوحدات الأساسية وتغطي بدلاتها . ونطلق عليها لذلك اسم « الوحدات المشتقة » . فالحجم مثلاً يمكن أن يقاس بواحدة معينة هي اللتر . وهي واحدة تشتق من واحدة الطول الأساسية أي السانتي متر وتساوي الف سانتي متر مكعب . فهي واحدة مشتقة من واحدة اساسية بالرغم من منحها اسماً خاصاً لا يشير الى هذا الاشتقاق . والحجم نفسه ليس مقداراً اساسياً لأنه مشتق من مقدار اساسي هو الطول . إذ ان الحجم ينتج من جداء ثلاثة أطوال .

اذن ، لا بد من انتقاء مقادير معينة من بين المقادير المديدة لاعتبارها مقادير اساسية وانتقاء وحدات لها . وعندئذ تغطي بقية المقادير ووحداتها بدلالة المقادير الأساسية ووحداتها . وليس من الضروري أن نتقي بعض المقادير المعينة دون غيرها . فبدلاً من الطول والكتلة والزمن كان بإمكاننا أن نختار مثلاً الحجم والقوة والسرعة الزاوية كمقادير اساسية ونعين لها وحدات تمييزاً اختيارياً محضاً . الا ان اختيار المقادير الأساسية ووحداتها أمر على جانب كبير من الأهمية لما له من تأثير مباشر على تعقيد أو تسهيل العلاقات الرياضية بين المقادير الفيزيائية .

عندما نعين المقادير الأساسية ووحداتها نقول اننا شكلنا جملة وحدات اساسية للقياس . وهناك نوعان من الجمل الأساسية : يقوم النوع الاول على اعتبار الطول (L) والكتلة (M) والزمن (T) مقادير أساسية ، في حين ان النوع الثاني يقوم على اعتبار الطول (L) والقوة (F) والزمن (T) مقادير أساسية . وفي كل من هذين النوعين عدد من الجمل لا تختلف عن بعضها إلا باختلاف الوحدات المختارة فقط . الجمل المروفة والاكثر انتشاراً هي جمل النوع الاول ومنها :

( ١ ) الجملة السنتية ( C G S ) ووحداتها الاساسية هي : السانتي متر (cm)

للطول والفرام (gm) للكتلة والثانية (sec) للزمن .

٢) الجملة المكثية (M K S) واحداً لها الاساسية هي : المتر (m) للطول والكيلوغرام (kg) للكتلة والثانية (sec) للزمن .

٣) الجملة الانكليزية (F P S) واحداً لها الاساسية هي : القدم (foot) للطول والرطل (pound) للكتلة والثانية (sec) للزمن .

٤) الجملة الانكليزية (FSS) واحداً لها الاساسية هي : القدم (foot) للطول والسلع (slug) الكتلة والثانية (sec) للزمن .

تسمى الجملتان الأوليان بالجملتين المتريتين لاستعمالهما الساتيمتر والمتر والفرام والكيلو غرام (تقسيمات مئوية) ، في حين ان الأخيرتين تعرفان بالجملتين الانكليزيتين نظراً لتكوينهما في انكلترا . وينتشر استعمالهما في انكلترا والولايات المتحدة ودول اخرى . ويوماً بعد يوم يميل العالم نحو استعمال الجمل المترية وخاصة في المجالات العلمية .

لقد تحدثنا عن هذه الجمل كجمل ميكانيكية . وكل واحدة منها كافية تمام الكفاية في أبحاث الميكانيك . أما في الفيزياء بصورة عامة حيث تدخل الكهربائية ايضاً فلا يكفي اختيار ثلاثة مقادير اساسية وواحداً لها بل يجب اضافة مقدار اساسي آخر يتعلق بالكهربائية كالشحنة او التيار او مايسمى بالكتلة المغناطيسية . فاذا فعلنا ذلك في الجملة السفئية (CGS) باضافة الشحنة الى المقادير الأساسية حصلنا على مايسمى بالجملة السفئية الكهربائية . ويتجه العلماء بصورة عامة الى استعمال الجملة المكثية (MKS) بعد اضافة شدة التيار اليها كمقدار اساسي وواحدته (الامبير) كواحدة اساسية . وتؤلف بذلك جملة (MKSA) التي يطلق عليها اليوم اسم «الجملة العملية» ويعمم استعمالها يوماً بعد يوم .

لنعد الآن الى طبيعة المقادير الفيزيائية المختلفة ، تلك الطبيعة التي تعبر عنها العلاقات الرياضية او القوانين التي تربط بينها . فانا نعتبرنا الحجم مثلاً رأينا انه يعطى بملاقة من الشكل  $V = L_1 L_2 L_3$  حيث  $V$  كل من  $L_1, L_2, L_3$  يمثل طولاً اي ان له طبيعة الطول . فللحجم اذن طبيعة مكعب الطول ( $L$ ) ولذا يمكننا أن نكتب علاقة تشير صراحة الى طبيعة المقدار  $V$  (الحجم) ، اي  $V = L^3$  ونسميها بدستور البعد للحجم .

لنأخذ الآن مقداراً فيزيائياً آخر ، التسارع ، ولنكتب العلاقة (دستور البعد) التي تشير الى طبيعة التسارع بدلالة المقادير الأساسية . يعطى التسارع بملاقة من الشكل  $a = \frac{d^2 L}{dt^2}$  حيث  $L$  مسافة او طول و  $t$  الزمن . ان تغير الطول له طبيعة الطول وتغير الزمن له طبيعة الزمن . ولذلك فان التسارع ، كما يظهر من العلاقة السابقة ، هو من طبيعة الطول مقسوماً على مربع الزمن . فدستور بعده إذن هو  $a = LT^{-2}$  . واخيراً لنعتبر القوة من دستور نيوتن  $F = ma$  . ان للقوة طبيعة جداء الكتلة بالتسارع ولذا فدستور بعدها هو  $F = MLT^{-2}$  . ويمكننا بنفس الطريقة أن نكتب دستور بعد أي مقدار فيزيائي مستعينين بعلاقة رياضية تربطه بالمقادير الأخرى ، كما فعلنا في الأمثلة السابقة تماماً .

وفي نهاية هذه الفقرة جدول يلخص دساتير الأبعاد والواحدات في الجمل الأكثر رواجاً واستملاً . هذا ويمكننا الانتقال من جملة الى أخرى وحساب واحداث المقادير في جملة ما بدلالة واحداث نفس المقادير في جملة أخرى . ولنا أن نستعين بدساتير الأبعاد والعلاقات الفيزيائية عندما وحيثاً نشاء . ونأخذ واحدة القوة في الجملة (MKS) كمثال ونحسبها بدلالة واحدة القوة في الجملة (CGS) . ان واحدة القوة في الجملة الأولى هي النيوتن (Newton) . ومن دستور البعد :

$$F = MLT^{-2}$$

نجد أن واحدها في الجملة (MKS) هي :

$$1 N = kg \cdot m \cdot sec^{-1}$$

وبمبوض كل واحدة اساسية في الطرف الايمن بما يساويها في الجملة (CGS) نجد :

$$\begin{aligned} 1 N &= (1000gm)(100 cm) sec^{-2} \\ &= 10^5 (gm \cdot cm \cdot sec^{-2}) \end{aligned}$$

ولكن في الجملة (CGS) ومن دستور البمد للقوة نجد :

$$1 dyne = 1 (gm \cdot cm \cdot sec^{-2})$$

وبمقارنة الملاحظتين الأخيرتين نجد أن  $1 N = 10^5 dynes$  أي أن واحدة القوة في الجملة (MKS) وهي النيوتن تساوي  $10^5$  من واحدة القوة في جملة (CGS) وهي الدينة . وب نفس الطريقة يمكننا أن نستنتج ما يكافئ أي واحدة في جملة ما بدلالة الواحدة المقابلة في أية جملة أخرى .

يمكننا أن نجد أيضاً قياس مقدار ما في جملة معينة بدلالة قياسه في جملة أخرى . ولناخذ القوة كمثال . لتكن لدينا القوة  $F$  التي قياسها  $X$  في الجملة (MKS) التي واحدة القوة فيها هي النيوتن . ما هو قياسها  $Y$  في الجملة (CGS) ؟ لدينا  $F = X \text{ Newtons}$  ولدينا  $1 \text{ Newton} = 10^5 dynes$  إذن  $F = 10^5 X dynes$  ومنه  $Y = 10^5 X$  . لاحظ أن قياس مقدار ما هو الممد الذي يقيسه مجرداً عن الواحدات . لاحظ أيضاً أن واحدة القوة في (CGS) أصغر من واحدها في الجملة (MKS) في حين أن قياس القوة في الجملة (CGS) اكبر من قياسه في (MKS) . ففي التحويل من جملة إلى أخرى ، إذا كبرت واحدة القياس صغر القياس نفسه والعكس بالعكس . وثبت فيما يلي جدولاً بأهم المقادير الميكانيكية مع دساتير أبعادها وواحدها في المجلتين (CGS) و (MKS) .

## الوحدات والابعاد

### الوحدات

M K S	CGS	دستور الابعاد	المقدار الفيزيائي
m	cm	L	الطول
kg	gm	M	الكتلة
sec	sec	T	الزمن
m/sec	cm/sec	$LT^{-1}$	السرعة
m/sec <sup>2</sup>	cm/sec <sup>2</sup>	$LT^{-2}$	التسارع
Newton	dyne	$MLT^{-2}$	القوة
Newton sec	dyne. sec	$MLT^{-1}$	الاندفاع والدفع
joule	erg	$ML^2T^{-2}$	الطاقة والمعمل
watt	erg/sec	$ML^2T^{-3}$	الاستطاعة
m <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	الحجم
kg/m <sup>3</sup>	gm/cm <sup>3</sup>	$ML^{-3}$	الكثافة
radian	radian	—	الزاوية
radian/sec	radian/sec	$T^{-1}$	السرعة الزاوية
radian/sec <sup>2</sup>	radian/sec <sup>2</sup>	$T^{-2}$	التسارع الزاوي
Newton m	dyne. cm	$ML^2T^{-2}$	عزم القوة ، المزدوجة
kg.m <sup>2</sup> /sec	gm.cm <sup>2</sup> /sec	$MLT^{-1}$	الاندفاع الزاوي
kg.m <sup>2</sup>	gm. cm <sup>2</sup>	$ML^2$	عزم العطالة
Newton/m <sup>2</sup>	dyne/cm <sup>2</sup>	$ML^{-1}T^{-2}$	الضغط





## الفصل الثاني

### حقول القوى المنتظم

القذائف والسقوط ، الحركة في وسط مقاوم

الحركة المقيدة والاحتكاك

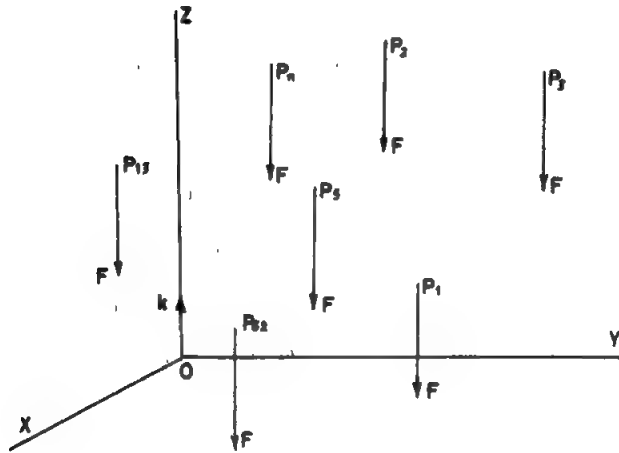
- حقول القوى المنتظمة
- الحركة في حقل منتظم ، التسارع الارضي والوزن ، سقوط الاجسام
- كمون الحقل المنتظم
- الحركة في وسط مقاوم
- الحركة المقيدة وقوى الاحتكاك
- حركة القذائف
- سقوط المظلات



## I — حقول القوى المنتظمة :

يقال عن حقل قوى انه منتظم إذا كانت القوة ثابتة في جميع نقاطه .  
 فإذا اعتبرنا القوة موازية للمحور  $oz$  من جملة المقارنة المطالية  $ox\ yz$  ومتجهة  
 بمكس اتجاه هذا المحور يمكننا ان نكتب القوة على الشكل :

$$\vec{F} = - F \vec{k}$$



الشكل (1)

حيث  $\vec{k}$  شعاع واحدة المحور  $oz$  و  $F$  شدة القوة  $\vec{F}$  . انظر الشكل (1) .

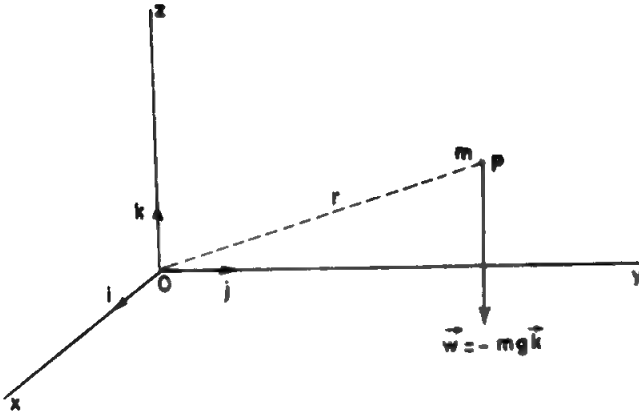
## II — الحركة في حقل منتظم ، التسارع الارضي والوزن ، السقوط :

إذا تحرك جسم مادي تحت تأثير حقل قوى منتظم كان تسارعه ثابتاً

وذلك حسب قانون نيوتن الثاني ، وهو معطى بالعلاقة :

$$\vec{a} = - \frac{F}{m} \vec{k} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (2)$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة .



الشكل (2)

ولقد لوحظ تجريبياً ان الأجسام التي تسقط على الأرض سقوطاً حراً من ارتفاعات محدودة يكون لها تسارع ثابت . وذلك بفرض أن مقاومة الهواء مهملة أو إذا كان السقوط في الخلاء . وهذا التسارع الثابت يسمى بتسارع الثقالة الأرضية أو التسارع الأرضي ( اختصاراً ) . وشدته هي بالتقريب  $981 \text{ cm/sec}^2$  عند سطح البحر . ان هذا التسارع ليس ثابتاً بل يختلف من مكان الى آخر على سطح الأرض فهو يزداد كلما ابتعدنا عن خط الاستواء نحو أحد القطبين بسبب تفلطح الكرة الأرضية عند الاستواء ، ويتناقص بازدياد الارتفاع عن سطح الأرض اي كلما ابتعدنا عن مركز كتلة الأرض . فالاجسام اذن تخضع لتأثير التسارع الأرضي وبالتالي تكون تحت تأثير قوى تجذبها نحو الأرض ومعطاة ، حسب قانون نيوتن ، بالعلاقة :

$$\vec{W} = -m g \vec{k} \quad (3)$$

حيث  $m$  هي كتلة الجسم المعتبر و  $g$  شدة التسارع الارضي . وتسمى القوة  $\vec{W}$  بوزن الجسم المادي ذي الكتلة  $m$  .

إذا كنا ندرس حركة الاجسام بتأثير الثقالة الارضية في منطقة محدودة على سطح الارض وضمن ارتفاعات صغيرة ، بالنسبة لنصف قطر الارض ، يمكننا أن نفترض لسهولة أن الارض منبسطة وان تسارعها ثابت في المنطقة المعنية . ضمن هذا الفرض واطافة الى التقريب القاضي بإهمال المقاومة الناجمة عن الهواء تعتبر حركة سقوط الاجسام على الارض بتأثير قوة ثقلها حركة متسارعة بانتظام ، ويطلق عليها اسم السقوط الحر . وتمثل معادلة الحركة بالعلاقة :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -g \vec{k} \quad \text{او} \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \vec{k} \quad (4)$$

ولما كانت هذه العلاقة لا تتعلق بكتلة الجسم  $m$  فان الحركة مستقلة عن الكتلة ، اي ان الحركة هي نفسها بالنسبة للاجسام الخفيفة والثقيلة على حد سواء . ومن أبرز الامثلة على الحركة آتفة الذكر حركة القذائف وسندرسها بمد قليل .

### III — كمون الحقل المنتظم :

نرى بسهولة ان الحقل المنتظم مشتق من كمون «محافظ» وأن كونه ، او الطاقة الكامنة لجسم كتلته واحدة الكتل ويتحرك في هذا الحقل ، يعطى بالعلاقة :

$$U = F (z - z_0) \quad (5)$$

وان هذه الطاقة في حقل الثقالة الارضية تعطى بالعلاقة :

$$U = mg (z - z_0) \quad (6)$$

حيث  $U = 0$  عندما  $z = z_0$  . ونسمي المستوى المين بـ  $z = z_0$  بمستوى

المقارنة للكون او مبدأ الكون . ويلاحظ ان الكون المعطى بالعلاقة (6) هو مقدار العمل الذي يقوم به وزن « ثقل » الجسم الذي كتلته  $m$  عندما يسقط من المستوى  $z$  الى المستوى  $z_0$  ، أي عندما يسقط مسافة شاقولية تساوي  $z - z_0$  .

#### IV — الحركة في وسط مقاوم :

يخضع الجسم المتحرك في الحالة العامة إلى قوى أخرى بالإضافة إلى ثقله . من هذه القوى تلك التي تعاكس الحركة او تقاومها والتي تنشأ بسبب الحركة في سائل أو غاز . وتسمى هذه القوى بالقوى المقاومة او المخمدة ، كما يسمى الوسط عندئذ وسطاً مقاوماً او مخمداً . لقد وجد تجريبياً ان القوة المقاومة لحركة الجسم في وسط ما لا تتعلق بالوسط فقط وانما تتعلق بسرعة الجسم ايضاً . فوجد مثلاً انها تتناسب طردياً مع السرعة من أجل السرعة الصغيرة نسبياً ومع مربع السرعة من أجل سرعة أكبر ومع قوى أكبر من أجل السرعة الكبيرة . اذا اعتبرنا الجسم خاضعاً لتأثير قوة ثقله وقوة مقاومة الوسط الذي يتحرك فيه كانت معادلة الحركة حسب قانون نيوتن الثاني بالشكل التالي :

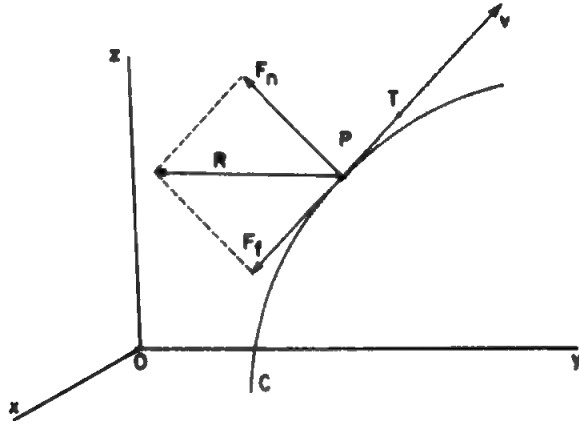
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{R}(v) \quad (7)$$

ويلاحظ أنه عندما تنعدم قوة المقاومة  $\vec{R}$  تؤول المعادلة الأخيرة إلى علاقة السقوط الحر (+) .

#### V — الحركة المقيدة وقوى الاحتكاك :

يفرض على الجسم المتحرك في بعض الحالات ان يسير على منحني او سطح معين ، فنسمي حركته عندئذ حركة مقيدة ونسمي السطح او المنحني الذي يتحرك عليه بالقييد . ونتيجة لهذا القيد فان الجسم المتحرك يؤثر على القيد بقوة تقابلها قوة رد الفعل التي تساويها بالشدة وتعاكسها بالاتجاه ،

وذلك حسب قانون نيوتن الثالث . لقوة رد الفعل هذه مركبتان احدهما  $F_n$  انظرية على القيد والثانية  $F_f$  مماسة له ومحولة على شعاع السرعة وتعاكسه بالاتجاه . انظر الشكل (3) . فهي اذن قوة مقاومة للحركة، منشأ هذه القوة هو الاحتكاك بين الجسم المتحرك و الجسم المتحرك بصورة عامة ، والسطح او المنحني الذي يتحرك



الشكل (3)

عليه . وتسمى لذلك بقوة الاحتكاك . ولقد وجد تجريبياً ان قوة الاحتكاك  $\vec{F}_f$  تتناسب شلتها مع شدة المركبة الاناظرية  $\vec{F}_n$  لقوة رد الفعل ، أي :

$$\vec{F}_f = -\mu |\vec{F}_n| \vec{T} \quad (8)$$

حيث  $\vec{T}$  شعاع واحدة مماس المسار و  $\mu$  عامل الاحتكاك الذي لا يتوقف الا على طبيعة سطح الجسم المتحرك و سطح القيد . واستعملت اشارة الناقص لأن  $\vec{T}$  محمول على السرعة في حين أن  $\vec{F}_f$  تعاكسها . وتصبح معادلة الحركة بصورة عامة على الشكل :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{F}_n + \vec{F}_f \quad (9)$$

## VI — حركة القذائف :

كتطبيق على ما تقدم نود دراسة حركة جسم قذف بسرعة ابتدائية ما مثل  $\vec{v}_0$  من موضع بدء  $\vec{r}_0$ . وسنعتبر لتبسيط الدراسة هنا ان الجسم عبارة عن نقطة مادية كتلتها هي كتلة القذيفة . وسنهمل قوة مقاومة الهواء لحركة القذيفة التي تبقى عندئذ خاضعة لثقلها فقط اثناء حركتها . فحركتها اذن هي حركة سقوط حر تمطي بالملاقة :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad (10)$$

وقبل البدء بدراسة الحركة لا بد من تعيين جملة المقارنة التي تنسب الحركة اليها . لتكن هذه الجملة هي تلك التي تتبين بالمحاور  $xyz$  التي ينطبق مركزها  $O$  على موضع البدء للقذيفة . انظر الشكل ( 4 ) . وليكن أحد محاورها  $z$  شاقولياً صاعداً وليكن ايضاً محورها  $oy$  بحيث ان السرعة الابتدائية  $\vec{v}_0$  واقمة في المستوى الشاقولي  $oyz$  . ولتكن عندئذ  $\alpha$  الزاوية التي تصنعها  $\vec{v}_0$  مع  $oy$  .

اذا نظرنا إلى الملاقة ( 10 ) فان كل ما نفهم منها بشكلها هذا هو أن تسارع القذيفة يساوي التسارع الارضي . ولدراسة حركة القذيفة دراسة كاملة يجب ايجاد شعاع السرعة وشعاع التسارع وشعاع الموضع ، أي يجب معرفة المسار معرفة تامة ، وكل ذلك بدلالة الزمن .

## آ — السرعة والتسارع :

نرى بكل بساطة ان شعاع التسارع معطى بالملاقة ( 10 ) كما ذكرنا قبل قليل . أما شعاع السرعة في اللحظة  $t$  فيمكن الحصول عليه بتكامل الملاقة ( 10 ) بين لحظة البدء  $t_0 = 0$  واللحظة  $t$  . وهذا التكامل يعطي



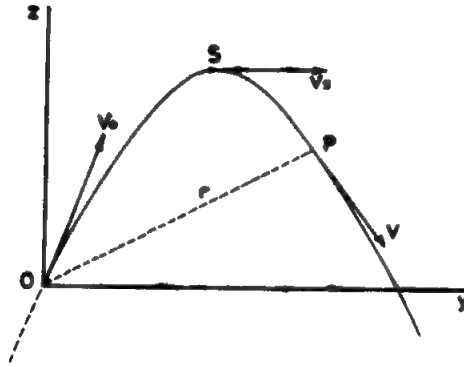
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad (11)$$

#### ب) الموضع والمسار

ان تكامل العلاقة (11) بين  $t_0 = 0$  و  $t$  يعطينا شعاع الموضع  $\vec{r}(t)$  في اللحظة الزمنية  $t$  وهو

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (12)$$

حيث  $\vec{r}_0$  هو شعاع الموضع في لحظة البدء  $t_0 = 0$  . وإذا ما اعتبرنا ان



الشكل (4)

القذيفة كانت في  $o$  في لحظة البدء كان  $\vec{r}_0 = 0$  ويصبح شعاع الموضع بالتالي معطى بالعلاقة

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t \quad (13)$$

نرى من العلاقة (11) ان السرعة الشعاعية في أية لحظة  $t$  مركبتين  $\vec{v}_0$  و  $\vec{g}t$ . وهذا يدل على ان السرعة في أية لحظة واقعة في المستوى المعين بالشعاعين الثابتين  $\vec{v}_0$  و  $\vec{g}$ . ونرى من العلاقة (13) ان لشعاع الموضع مركبتين الاولى محمولة على  $\vec{v}_0$  والثانية محمولة على  $\vec{g}$ ، فهو إذن واقع دائماً في المستوى المتعين بالشعاعين  $\vec{v}_0$  و  $\vec{g}$ . ونستنتج لذلك ان مسار القذيفة هو منحني واقع في المستوى الثابت المذكور. ونظراً لكون  $\vec{v}_0$  واقعة في المستوى  $oyz$  نستنتج ان المسار واقع في ذلك المستوى.

لما كانت  $\vec{r}(t)$  تابعاً من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن  $t$  فان من الممكن الحكم بأن المسار قطع مكافئ. ولتبيان ذلك نكتب معادلاته الديكارتية التي تربط بين احداثيه الديكارتيتين  $y$  و  $z$ . ان إسقاط العلاقة (13) على المحورين يعطي

$$y = v_0 t \cos \alpha \quad (14)$$

$$z = - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha \quad (15)$$

حيث  $v_0$  و  $g$  يمثلان طوليتي السرعة الابتدائية والتسارع الأرضي وذلك على الترتيب. وبحذف الزمن  $t$  من العلاقتين الاخيرتين نحصل على معادلة المسار الديكارتية

$$z = (\tan \alpha) y - \left( \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) y^2 \quad (16)$$

ومن الواضح ان هذه العلاقة تمثل قطعاً مكافئاً محوره يوازي المحور  $oz$ .

#### ج) ذروة المسار :

لما كان المسار قطعاً مكافئاً وكان تسارع القذيفة سالباً ( اي باتجاه الشاقل النازل ) فان المسار يتحدب نحو الأعلى ويكون له ذروة  $S$  تصلها القذيفة بعد زمن  $t_1$ ، تبدأ القذيفة بعده بالهبوط. يمكننا تعيين احداثيي الذروة

«  $y_g$  و  $z_g$  » وزمن وصول القذيفة الى النروة بملاحظة ان سرعة القذيفة تكون أفقية في لحظة وصولها الى النروة .

ان مركبتي السرعة بصورة عامة هما حسب العلاقة (11)

$$y' = v_0 t \cos \alpha \quad (17)$$

$$z' = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (18)$$

وتصبحان في النروة :

$$y'_g = v_0 \cos \alpha \quad (19)$$

$$z_g = -gt_g + v_0 \sin \alpha = 0 \quad (20)$$

ونجد من هاتين العلاقتين زمن وصول القذيفة الى النروة وسرعتها فيها ، أي :

$$t_g = \frac{v_0}{g} \sin \alpha \quad (21)$$

$$y'_g = v_0 \cos \alpha \quad (22)$$

$$z_g = 0 \quad (23)$$

ولدى التمويض من (21) في (14) و (15) نجد احداثيي النروة :

$$y_g = v_0^2 \sin 2\alpha / 2g \quad (24)$$

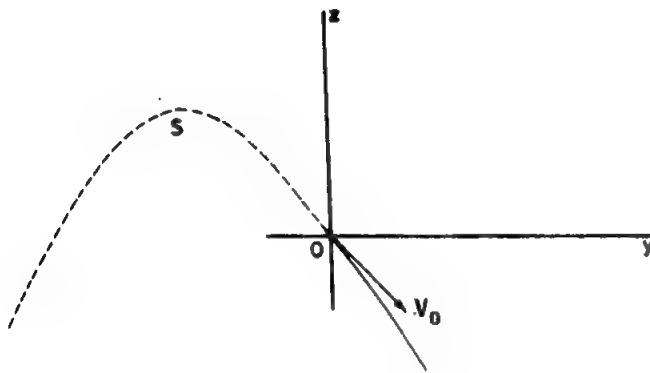
$$z_g = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g \quad (25)$$

لنلاحظ الآن الحالات المختلفة حسبما تكون زاوية القذف  $\alpha$  موجبة او سالبة او معدومة :

(1)  $\alpha > 0$  . في هذه الحالة احداثيا النروة موجبان والمسار يأخذ الشكل المبين في الشكل (4) .

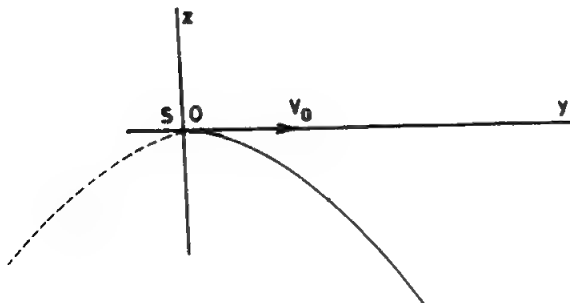
(2)  $\alpha < 0$  . في هذه الحالة  $y_g < 0$  و  $z_g > 0$  والمسار عندئذ هو كما في الشكل (5) . والجزء الفعلي من المسار، أي الذي تتمقه القذيفة، هو

الجزء المستمر . ونلاحظ ان زمن الوصول الى النروة سالب في هذه الحالة كاتين الملاقة ( 21 ) . وهذا يعني ان القذيفة تظهر وكأنها كانت في النروة قبل الزمن  $t_0$  .



الشكل ( 5 )

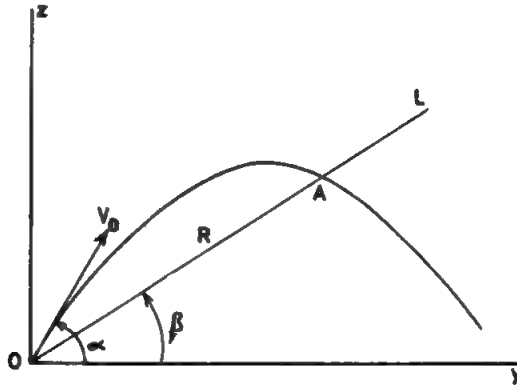
3 (  $\alpha = 0$  ) اي ان سرعة البدء افقية والنروة في هذه الحال تقع في المبدأ 0 ، و  $t_0 = 0$  بالطبع ، الشكل ( 6 ) .



الشكل ( 6 )

( و ) مدى القذيفة على مستوى مائل :

تسمى النقطة A حيث يتقاطع المسار مع المستوى OL ( المائل على الافق بزاوية  $\beta$  ) بنقطة مدى القذيفة على ذلك المستوى . ويسمى بعدها R عن نقطة القذف o بمدى القذيفة على المستوى نفسه . أما الزمن  $t_A$  الذي تستغرقه القذيفة حتى تصل إلى نقطة المدى فيدعى بزمن المدى . وعندما تكون A هدف القذيفة يمكن ان نسمي الفترة الزمنية  $t_A$  بزمن الرمي ، وهو على غاية من الأهمية في حالة الرمي على أهداف متحركة اذ يجب ان يتوافق وصول الهدف ووصول القذيفة الى النقطة A . ولحساب زمن الرمي واحداثيي نقطة المدى A والمدى R نكتب معادلي المسار والمستوى OL اللذين يتقاطعان في A .



الشكل (7)

ان معادلة OL هي

$$z_1 = y_1 \cdot \tan \beta \quad (26)$$

أما المسار فيعطى بالعلاقة (13) أو بالعلاقين (14) و (15) كما رأينا سابقاً . وفي نقطة التقاطع يكون :  $y = y_1$  و  $z = z_1$  وهذا يؤدي الى العلاقات التالية :

$$t_A = \frac{2 v_o}{g} \frac{\sin (a - \beta)}{\cos \beta} \quad (27)$$

$$y_A = \frac{2 v_o^2}{g} \frac{\sin (a - \beta) \cos a}{\cos \beta} \quad (28)$$

$$z_A = \frac{2 v_o^2}{g} \frac{\sin (a - \beta) \cos a}{\cos \beta} \cdot \tan \beta \quad (29)$$

$$R = \frac{2 v_o^2}{g} \frac{\sin (a - \beta) \cos a}{\cos^2 \beta} \quad (30)$$

$$= \frac{v_o^2}{g} [ \sin (2a - \beta) - \sin \beta ] / \cos^2 \beta \quad (31)$$

ومن الواضح ان المدى أعظمي عندما يكون

$$\frac{d R}{d a} = \frac{2 v_o^2}{g} \cos (2a - \beta) / \cos^2 \beta = 0 \quad (32)$$

وهذا يتحقق عندما تكون

$$a = a_m = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (33)$$

وعندئذ تكون قيمة المدى الأعظم مساوية

$$R_m = \frac{v_o^2}{g (1 + \sin \beta)} \quad (34)$$

حالة خاصة : المستوى OL افقي اي  $\beta = 0$  . تؤول العلاقات السابقة المتعلقة بنقطة المدى الى ما يلي :

$$t_A = \frac{2 v_o}{g} \sin a \quad (35)$$

$$y_A = R = \frac{v_o^2}{g} \sin 2a \quad (36)$$

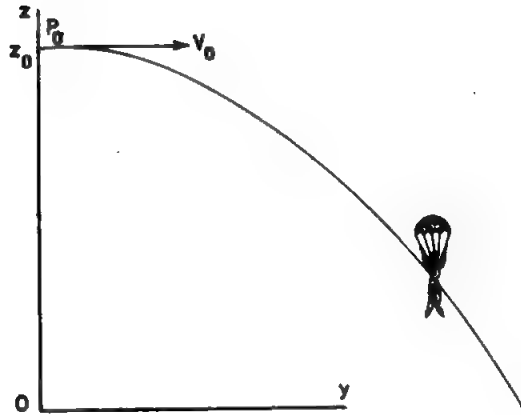
$$z_A = 0 \quad (37)$$

$$a_m = \pi / 4 = 45^\circ \quad (38)$$

$$R_m = v_o^2 / g \quad (39)$$

### VIII — حركة المظلي أثناء السقوط :

لنفرض ان طائرة كانت تحلق في لحظة  $t_0 = 0$  على ارتفاع  $z_0$  عن سطح الارض وبسرعة افقية  $v_0$  . ولنفرض ايضاً أن مظلياً قذف بنفسه من الطائرة في تلك اللحظة . ان سرعته في لحظة الانفصال عن الطائرة هي نفس سرعتها آنذاك . ولندرس الآن حركته اعتباراً من اللحظة  $t_0$  والوضع الابتدائي  $(0, z_0)$  الى اللحظة  $t_g$  التي يصل فيها الى الارض في الموضع  $(y_g, 0)$  كما يتبين من الشكل (8) الذي اخترنا فيه المحور الشاقولي  $oz$  متجهاً نحو الاسفل .



الشكل (8)

لكتابة معادلة ( او معادلات ) الحركة لا بد اولاً من تعيين القوى المؤثرة على الجلة المتحركة ( المظلي ومظلاته ) ولتكن  $m$  مجموع كتلتيهما . ان القوى المؤثرة على الجلة ، التي نعتبرها نقطة للتبسيط ، هي :

$$(1) \quad \vec{F}_g = m \vec{g} \text{ قوة الثقالة}$$

(2) قوة مقاومة الهواء  $\vec{F}_r = -\gamma \vec{v}$  حيث يتعلق الثابت  $\gamma$  بكثافة الهواء وبالسطح الظاهري للظلة كما يراه ناظر باتجاه السرعة

(3) قوة دفع التيارات الهوائية التي نفرضها معدومة هنا للتبسيط .  
وتكون معادلة الحركة

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} - \gamma \vec{v} \quad (40)$$

ولما كانت الحركة مستوية ويتمين مستويها بالشعاعين  $\vec{g}$  ,  $\vec{v}_0$  أي oyz الشاقولي فإن من الممكن التمييز بين اتجاهين oz و oy وذلك بإعادة كتابة العلاقة السابقة على الشكل :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} - \alpha v_y \vec{j} - \beta v_z \vec{k} \quad (41)$$

وباسقاط هذه العلاقة على المحورين oy , oz نحصل على المعادلتين :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = -\alpha v_y \quad (42)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{dv_z}{dt} = mg - \beta v_z \quad (43)$$

ان حل المعادلتين الاخيرتين وذلك بتكاملها بين اللحظتين 0 و t يعطي مركبتي السرعة

$$v_y = v_0 \exp ( - \alpha t / m ) \quad (44)$$

$$v_z = \frac{m}{\beta} g [ 1 - \exp ( - \beta t / m ) ] \quad (45)$$

حيث :

$$\exp (x) = e^x \quad (46)$$



كما ان تكامل المعادلتين (44) ، (45) مرة أخرى بين  $t$  و  $t_0$  يعطي المعادلتين الوسيطيتين للمسار :

$$y = \frac{m}{a} v_0 [1 - \exp(-at/m)] \quad (47)$$

$$z = z_0 + t \frac{mg}{\beta} + \frac{m^2}{2} g [1 - \exp(-\beta t/m)] \quad (48)$$

اما التسارع بدلالة الزمن فانه يتبع عن اشتقاق علاقتي السرعة ويمطي ذلك

$$a_y = - \frac{a}{m} v_0 \exp(-at/m) \quad (49)$$

$$a_z = g \exp(-\beta t/m) \quad (50)$$

ونلاحظ من المعادلتين (44) و (45) انه بعد زمن كبير نسبياً يقترب المقداران  $\exp(-at/m)$  و  $\exp(-\beta t/m)$  من الصفر وتأخذ السرعة قيمة ثابتة تسمى بالسرعة الحدية ومعطاة بالمعادلتين :

$$(\dot{v}_y)_f = 0 \quad (51)$$

$$(v_z)_f = mg / \beta \quad (52)$$

أما زمن الوصول الى الارض فيتمين من تمويض  $z$  بصفر و  $t$  بـ  $t_g$  في المعادلة (48) ، كما نحصل على موضع سقوط المظلي على الارض  $y_g$  بتمويض  $t_g$  الناتجة في المعادلة (46) .



## الفصل الثالث

### حقل القوى المركزي والحركة الفلكية

- تعريف الحقل المركزي
- خواص الحقل المركزي
- معادلات الحركة في الحقل المركزي
- اشكال معادلات الحركة
- تعيين المسار من الحقل المركزي وبالعكس
- الطاقة الكامنة في الحقل المركزي وعلاقة انحفاظ الطاقة
- حركة جسيم في حقل مركزي متناسب عكسا مع مربع البعد
- قوانين كبلر الفلكية



## I — تعريف الحقل المركزي :

يقال عن حقل القوى أنه مركزي إذا كانت القوة المؤثرة على جسيم ( نقطة مادية ) كتلته  $m$

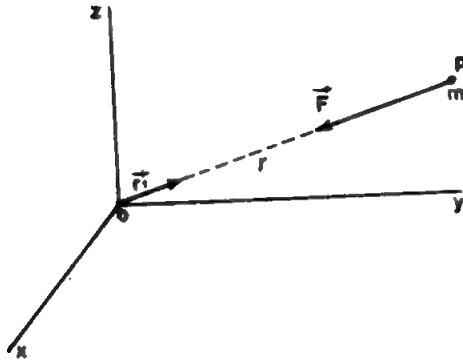
في أية نقطة من نقاطه محقة الشرطين التاليين :

أ — القوة محمولة على

مستقيم مار من نقطة  $O$

تسمى مركز الحقل —

الشكل (1) .



ب — شدة القوة

تأبسة للبعد بين الجسم والنقطة الثابتة . الشكل (1)

ويمكن وفق الشرط الأول أن تكون هذه القوة جاذبة أو دافعة ويسمى الحقل عندئذ جاذباً أو دافعاً بالترتيب . ونستطيع أن نكتب القوة على الشكل التالي :

$$\vec{F} = f(r) \vec{r}_1 \quad (1)$$

حيث  $\vec{r}_1 = \vec{r} / r$  هو شعاع واحدة حامل القوة و  $\vec{r}$  و  $r$  هما بالترتيب شعاع موضع الجسم وبعده عن مركز القوة . أما  $f(r)$  فيسمى تابع القوة وهو يعين شدتها الجبرية .

## II — خواص الحقل المركزي :

تقصد بخواص الحقل الصفات التي تتميز بها حركة جسيم خاضع لذلك الحقل . وعلى هذا فإن حركة الجسيم في حقل مركزي تتميز بالصفات التالية :

أ — المسار مستو :

ليكن الجسيم  $P$  المتحرك في الحقل المركزي — الشكل (1) — حيث

تمثل القوة في كل نقطة منه بالملاقة (1) . ولتكن  $\vec{v}$  سرعته ، ولنعتبر الشعاع  $\vec{h}$  الممثل للجداء الشعاعي لسرعة الجسم وشعاع موضعه :

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (2)$$

سنبين أولاً أن هذا الشعاع  $\vec{h}$  ثابت . ولهذا المفروض يكفي أن نبين أن مشتقه معدوم . وبلاشتقاق نجد :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ &= 0 + \vec{r} \wedge \vec{F} / m \\ &= \frac{\vec{r}}{m} f(\vec{r}) \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_1 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

حيث استعملنا قانون نيوتن الثاني  $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  وكذلك الملاقة (1) .

إذاً فالشعاع  $\vec{h}$  ثابت . نستنتج من ثبات  $\vec{h}$  في المنحى والاتجاه أن  $\vec{r}$  و  $\vec{v}$  واقمان في مستو واحد دائماً ، وأن هذا المستوي متعامد مع الشعاع الثابت  $\vec{h}$  . إذاً ، فالحركة مستوية أو أن مسار الجسم مستو .

ب - الاندفاع الزاوي محافظ :

يمثل الاندفاع الزاوي للجسم المتحرك بالملاقة التعريفية

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (4)$$

أي أنه عزم الاندفاع الخطي للجسم حول مركز الحقل . ونرى أن :

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m \vec{h} \quad \text{ثابت} \quad (5)$$

ولما كان  $\vec{h}$  ثابتاً فإن  $\Omega$  ثابت ، ويدل ذلك على ان الاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  محافظ .

### ج - الحركة خاضعة لقانون السطوح :

ينص هذا القانون على ان شعاع موضع الجسم المتحرك  $\vec{r}$  يمسح مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية ، أي أن السرعة السطحية ثابتة .  
وللبرهان على أن الحقل المركزي يحقق هذه الخاصية يجب أن نبرهن على أن المشتق بالنسبة للزمن للسطح A الذي يمسحه شعاع الوضع ثابت .

لنفرض أن مستوي الحركة هو المستوي oxy وأن مركز الحقل هو مبدأ الاحداثيات o . لتكن P و Q موضعي الجسم المتحرك في اللحظتين t و t +  $\Delta t$  . حيث  $\Delta t$  فترة زمنية قصيرة جداً . إذا اعتبرنا المحور ox

مبدأ لقياس السطوح التي يمسحها شعاع الموضع  $\vec{r}$  فاننا نسمي السطح الذي يحدد بـ ox و op و MP بالمقدار A . أما المقدار  $\Delta A$  فيمثل السطح المحصور بين OP , OQ , PQ ، ويمكن أن نأخذ كقيمة تقريبية له المثلث OPQ .

ويلاحظ أن  $\Delta A$  هو

السطح الممسوح خلال

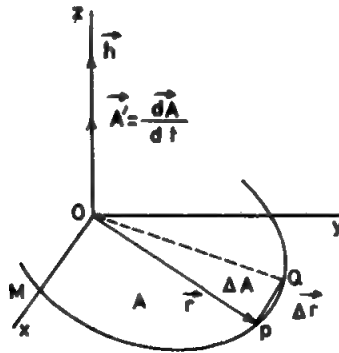
الفترة  $\Delta t$  . انظر

الشكل ( 2 ) . إذا مثلنا

السطح  $\Delta A$  بمقدار

شعاعي  $\vec{\Delta A}$  وكان هذا

الأخير محمولاً على oz



فان بإمكاننا أن نبر عنه عندئذ بالعلاقة :

الشكل ( 2 )

$$\vec{\Delta A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \Delta \vec{r} \quad (6)$$

لأن سطح المثلث OPQ الممثل لـ  $\Delta A$  هو القيمة المطلقة للطرف الأيمن من هذه العلاقة . بما أن  $\vec{r}$  و  $\Delta \vec{r}$  بمستو واحد وبالتالي  $\Delta \vec{A}$  محمول على  $oz$  فإن  $\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t}$  محمول على  $oz$  أيضاً مهما كان  $t$  و  $\Delta t$  . ومنه نجد :

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{A}}{d t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{h} \end{aligned} \quad (7)$$

وهي السرعة السطحية مئالة شعاعياً . وشدة هذا الشعاع ( قيمته المطلقة ) هي السرعة السطحية كمقدار سلمي . بما أن  $\vec{h}$  ثابت فإن  $dA / dt$  ثابت أيضاً . فالسرعة السطحية إذاً ثابتة ، وهذا ما كنا نحاول البرهان عليه . ويسمى المقدار الثابت  $\frac{1}{2} h$  أحياناً بثابت السطوح .

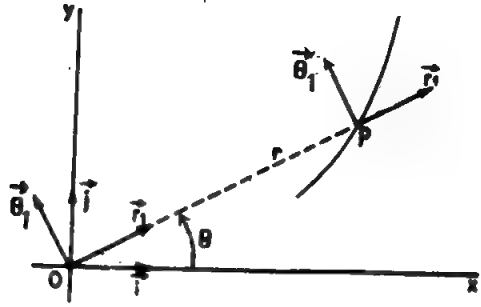
### III — معادلات الحركة في الحقل المركزي :

نظراً لكون القوة المؤثرة على الجسم محمولة على شعاع موضعه فإن من الأسهل أن نستخرج معادلات الحركة في الاحداثيات القطبية المستوية بدلاً من الاحداثيات الديكارتية . إذا كان  $r$  و  $\theta$  الاحداثيين القطبيين و  $\vec{r}_1$  شعاع واحدة  $r$  و  $\theta_1$  شعاع واحدة المحور المتعامد معه ، كما يبين الشكل (3) فإن :

$$\vec{r} = r \vec{r}_1 \quad (8)$$

وللحصول على السرعة والتسارع نشتق  $\vec{r}$  مرتين بالنسبة للزمن . وهذان المشتقان سيحتويان على مشتقي الشعاعين  $\vec{r}_1$  و  $\vec{\theta}_1$  المتغيرين . ولذلك سنعمد أولاً إلى حساب مشتقات هذين الشعاعين .





الشكل ( 3 )

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \\ \vec{\theta}_1 &= -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ  $\theta$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{d\theta} &= -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta = \vec{\theta}_1 \\ \frac{d\vec{\theta}_1}{d\theta} &= -\vec{i} \cos \theta - \vec{j} \sin \theta = -\vec{r}_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

أما بالنسبة للزمن فإن :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{dt} &= \frac{d\vec{r}_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \theta' \vec{\theta}_1 \\ \frac{d\vec{\theta}_1}{dt} &= \frac{d\vec{\theta}_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\theta' \vec{r}_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

باستعمال هذه المشتقات في حساب السرعة والتسارع فائتأ نجد :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r' \vec{r}_1 + r \theta' \vec{\theta}_1 \quad (12)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2) \vec{r}_1 + (r\theta'' + 2r'\theta') \vec{\theta}_1 \quad (13)$$

إذا طبقنا الآن قانون نيوتن الثاني  $\vec{F} = m \vec{a}$  على الجسم المتحرك P مستعملين المادلتين (1) و (13)، ثم استقطنا العلاقة الناتجة (وهي المعادلة الشعاعية للحركة) على المحورين المتحركين  $\vec{r}_1$  و  $\vec{\theta}_1$  فاننا نحصل على المادلتين القطبيتين للحركة وهما:

$$r'' - r \theta'^2 = f(r) / m \quad (14)$$

$$r \theta'' + 2 r' \theta' = 0 \quad (15)$$

حيث تشير الفتحاح في كل ما تقدم إلى الاشتقاق بالنسبة للزمن. إذا كان تابع القوة  $f(r)$  معروفاً أمكن حل المادلتين التفاضليتين (14) و (15) بدلالة الزمن وبالتالي إيجاد ما نسميه بالمادلتين الوسيطيتين للمسار:

$$r = r(t) \quad (16)$$

$$\theta = \theta(t) \quad (17)$$

وإذا أمكن حذف الوسيط (وهو الزمن  $t$ ) بين هاتين المادلتين حصلنا عندئذ على المعادلة القطبية للمسار:

$$F(r, \theta) = 0 \quad (18)$$

#### IV — اشكال معادلات الحركة :

نستطيع كتابة معادلات الحركة بأربعة أشكال مختلفة ومتكافئة وهي:

##### ١ — الشكل الاول :

تمثل المادلتان (14) و (15) الشكل الأول لمعادلات الحركة. ومن هذا الشكل نستطيع استخراج الأشكال الأخرى.

##### ب — الشكل الثاني :

ان استعمال المادتين (12) و (8) في العلاقة (2) يقود إلى المعادلة :

$$r^2 \theta' = h \quad \text{ثابت} \quad (19)$$

وزى باشتقاق هذه المعادلة الأخيرة أنها تكافئ المعادلة الثانية (15) من الشكل الأول لمعادلات الحركة . أما استعمال (19) في المعادلة (14) فانه يؤدي إلى :

$$r'' - h^2/r^3 = f(r) / m \quad (20)$$

والملاحظان الأخيرتان (19) و (20) تؤلفان الشكل الثاني لمعادلات الحركة . إن الفرق الملحوظ بين الشكل الثاني والشكل الأول هو أن المعادلة (20) من الشكل الثاني لا تحوي إلا  $r$  والثابتين  $h, m$  ، ويمكن حلها مباشرة للحصول على  $r$  بدلالة  $t$  . وبدد ذلك يسهل حل (19) بعد معرفة  $r$  . أما في معادلتى الشكل الأول (14) و (15) فالتحولات غير منفصلة ، وهذا يجعل الحل أكثر صعوبة .

### ج - الشكل الثالث :

إذا انتقلنا من المشتقات بالنسبة للزمن إلى المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية  $\theta$  ، أي إذا حذفنا الزمن  $t$  بين المادلتين (19) و (20) فاننا نحصل على الشكل الثالث لمعادلات الحركة ، وهي :

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r = r^4 f(r) / m h^2 \quad (21)$$

وذلك بالإضافة إلى المعادلة (19) . إذا (19) و (21) تمثلان الشكل الثالث . ويلاحظ أن المعادلة (21) هي المعادلة التفاضلية القطبية للمسار ولا دخل للزمن فيها . حل هذه المعادلة يعين المسار وحل المعادلة (19) يعين الحركة لأنه يعطي  $\theta$  بدلالة الزمن .

### د - الشكل الرابع :

قد يكون مفضلاً في بعض الأحيان أن نستعمل بدلاً من  $r$  متحولاً آخر  $u = \frac{1}{r}$  . فإذا انتقلنا من  $r$  إلى  $u$  في المعادلة (21) آت هذه المعادلة إلى الصيغة التالية :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -f\left(\frac{1}{u}\right) / m h^2 u^2 \quad (22)$$

وأما (19) فتصبح :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = h u^2 \quad (23)$$

وهما تمثلان الشكل الرابع لمعادلات الحركة . وهنا نلاحظ أيضاً أن أولاهما تحدد المسار وثانيتها تميز الحركة عليه .

#### ٧ - تعيين المسار من الحقل المركزي وبالعكس :

إذا كان الحقل المركزي معلوماً ، أي إذا عرف التابع  $f(r)$  ، فيمكن الحصول على المسار بالطرق التالية :

أولاً : بكاملة المعادلتين التفاضليتين (14) و (15) أو المعادلتين (19) و (20) حيث نحصل على المعادلتين الوسيطيتين للمسار :

$$r = r(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$

والوسيط هو الزمن ويؤدي حذفه بينها إلى المعادلة الهندسية للمسار بشكلها القطبي :

$$F(r, \theta) = 0$$

ثانياً : كما أن تكامل المعادلة (21) يؤدي إلى المعادلة القطبية الأخيرة .

ثالثاً : وأما المعادلة (22) فتؤدي بالتكامل إلى معادلة للمسار من الشكل :

$$\varphi(u, \theta) = 0$$

والنتيجة في جميع الحالات واحدة وتؤدي إلى المسار نفسه ، فهي متكافئة . أما إذا كان المسار معلوماً فمن السهل عندئذ أن نستنتج الحقل

المركزي منه ، أي ان نستنتج التابع  $f(r)$  . بصورة خاصة نحصل من المعادلتين ( 21 ) و ( 22 ) على عبارتين لهذا التابع ، وهما :

$$f(r) = \frac{mh^2}{r^4} \left[ \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \right] \quad (24)$$

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -mh^2 u^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \quad (25)$$

#### IV — الطاقة الكامنة في الحقل المركزي وعلاقة انحفاظ الطاقة :

بما أن القوة في الحقل المركزي تابعة للموضع فإن من السهل عندئذ أن نرى أنها تشتق من كمون . أي :

$$\vec{F}(r) = f(r) \vec{r}_i = - \text{Grad } V(r) \quad (26)$$

أو ان تابع القوة  $f(r)$  مشتق من تابع الكون  $V(r)$  . أي :

$$f(r) = -dV(r) / dr \quad (27)$$

وبالتالي فإن الكون يمين بالعلاقة :

$$V(r) = - \int_{r_0}^r f(r) dr \quad (28)$$

حيث  $r_0$  هو مبدأ قياس الكون ، ونستبره المكان الذي تنعدم فيه القوة ( ينعدم فيه الحقل المركزي ) أي المكان الذي ينعدم فيه  $f(r)$  .  
اذأ :

$$f(r_0) = 0 \quad (29)$$

في حالة حقل من الشكل  $f(r) = \frac{c}{r^2}$  مثلاً نعتبر  $r_0 = \infty$  لأن  $f(\infty) = 0$  وبالتالي  $V(\infty) = 0$  . فاللانهاية في هذه الحالة تعتبر مبدأ

للكون . أما اذا كان الحقل بحيث  $f(r) = cr^3$  مثلاً فان  $r_0 = 0$  لأن  $f(0) = 0$  وأيضاً  $v(0) = 0$  . فبدأ الاحداثيات هنا يؤخذ كبداً لقياس الكون .

ومما يكن من أمر فان تعيين مبدأ الكون ليس على جانب كبير من الأهمية لأن ما يهمنا عملياً هو فروق الكون لا الكون نفسه ، وهذه الفروق لا تتأثر باختيار المبدأ ، اللهم الا بالاشارة أحياناً . ولهذا السبب فان بالإمكان مخالفة الاصطلاح السابق عندما نجد ذلك مناسباً .

بعد أن عينا الكون ( الطاقة الكامنة ) ولما كان هذا الكون تكاملاً للقوة ( أي القوة مشتقة من كون ) فاننا نكتب مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية :

$$E = V + T = \text{ثابت} \quad (30)$$

حيث  $T$  تمثل الطاقة الحركية للجسيم و  $V$  طاقته الكامنة و  $E$  طاقته الكلية . ان استعمال الملاحظين ( 12 ) و ( 30 ) ممّا يعطي :

$$T = E - V = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m ( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 ) \quad (31)$$

أما استعمال ( 19 ) في ( 31 ) فانه يعطي :

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \frac{2}{m} ( E - V ) \quad (32)$$

ونستطيع بسهولة أن نرى أن هذه المادلة تأخذ الشكلين التاليين :

$$\frac{1}{r^4} \left[ \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] = \frac{2 ( E - V )}{mh^2} \quad (33)$$

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2 ( E - V )}{mh^2} \quad (34)$$

ان هذه المعادلات الأربع الأخيرة كلها متكافئة ويمكن استعمال أي منها كمعادلة للحركة حينما تكون  $E$  ،  $V$  معلومتين . وسنرى فيما بعد كيف تستعمل

أحدهما وهي الأخيرة لتمييز مسار الجسم المتحرك في حقل مركزي .

#### IV — حركة جسيم في حقل مركزي متناسب عكساً مع مربع البعد :

إن دراسة حركة الجسم في حقل متناسب عكساً مع مربع البعد تلقي ضوءاً ساطعاً على كيفية استعمال المعلومات السابقة ، كما أن هذه الدراسة تنطبق على حركة جسيم في حقل جاذبية مركزي أو حقل كهربائي جاذب أو دافع . ففي الأول ، أي حقل الجاذبية ، تكون القوة متناسبة عكساً مع مربع البعد بين الجسم ومركز الحقل كما أن هذه القوة هي قوة جاذبة تحاول تقريب الجسم من مركز الحقل . أما في الحقل الكهربائي فتكون القوة متناسبة عكساً مع مربع المسافة بين الجسم المشحون والشحنة الكهربائية التي تسبب الحقل والتي هي مركز الحقل . في الحالتين القوة متناسبة عكساً مع مربع المسافة إلا أن القوة قد تكون موجبة ( دافعة ) أو سالبة ( جاذبة ) وذلك بالنظر إلى توجيه شعاع الموضع الذي شعاع واحدته  $\vec{r}_1$  من مركز القوة بعيداً عنه إلى الجسم . سندرس فيما بعد حقل التجاذب الكوفي بالتفصيل وكذلك حركة جسيم كهربائي في حقل كهربائي مركزي وذلك في حينه . على كل حال نعتبر الآن الشكل المصمم للقوة المركزية بالصيغة الرياضية :

$$\vec{F} = - \frac{D}{r^2} \vec{r}_1 \quad (35)$$

حيث D ثابت موجب أو سالب حسبما تكون القوة جاذبة أو دافعة . ويتضح من هذه العلاقة أن تابع القوة هو :

$$f(r) = - \frac{D}{r^2} \quad (36)$$

إذا استعملنا الآن معادلة الحركة ( 22 ) التي وجدناها سابقاً رأينا أنها تأخذ الشكل :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{D}{mh^2} \quad (37)$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية يعطي المعادلة القطبية للمسار . وهذا الحل هو من الشكل :

$$u = \frac{D}{mh^2} + C \cos (\theta - \theta_0) \quad (38)$$

حيث  $C, \theta_0$  ثابتا التكامل . أما الثابت  $\theta_0$  فيمكن أخذه مساوياً للصفر ، وهذا يكافئ تدوير المحاور الاحداثية بالمقدار  $\theta_0$  . وأما الثابت  $C$  فيمكن تعيينه من استعمال علاقة انحفاظ الطاقة (34) مع معادلة المسار الاخيرة (38) بعد أخذ  $\theta_0 = 0$  :

$$C^2 \sin^2 \theta + \left[ \frac{D}{mh^2} + C \cos \theta \right]^2 = \frac{2(E - V)}{mh^2} \quad (39)$$

بإصلاح هذه العلاقة جبرياً واستعمال عبارة الكون :

$$V = - \int_{\infty}^r f(r) dr = - \frac{D}{r} = - D \left( \frac{D}{mh^2} + C \cos \theta \right) \quad (40)$$

فاننا نجد :

$$C^2 = \frac{D^2}{m^2 h^4} + \frac{2E}{mh^2} \quad (41)$$

وتأخذ عندئذ معادلة المسار الشكل :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{D}{mh^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{D^2}} \cos \theta \right] \quad (42)$$

تمثل هذه المعادلة الشكل العام للمعادلة القطبية لاقطوع المخروطية وهي :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (43)$$



أو:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta) \quad (44)$$

بمقارنة الملاحظين (42) و(44) نجد أن المسار الذي تحدده الأولى هو قطع مخروطي وسيطه:

$$p = mh^2 / D \quad (45)$$

وتباعده المركزي:

$$e = \sqrt{1 + 2mh^2 E / D^2} \quad (46)$$

ولما كان التباعد المركزي هو الذي يحدد نوع المسار فإننا نميز بين ثلاث حالات مختلفة:

**أولاً:** عندما تكون الطاقة الكلية للجسيم المتحرك موجبة (  $E > 0$  ) فإن التباعد المركزي (46) يكون أكبر من الواحد . وعندئذ يكون المسار قطعاً مخروطياً زائداً .

**ثانياً:** إذا كانت الطاقة الكلية معدومة (  $E = 0$  ) فإن التباعد المركزي يساوي الواحد (  $E = 1$  ) والمسار قطع مكافئ .

**ثالثاً:** وأخيراً إذا كانت الطاقة الكلية سالبة (  $E < 0$  ) فالتباعد المركزي أصغر من الواحد (  $e < 1$  ) والمسار قطع ناقص .

وفيما يلي سنبين تأثير اتجاه الحقل المركزي على نوع المسار ، فندرس حالة الحقل الدافع وحالة الحقل الجاذب كلا على انفراد .

#### ٢ - حالة الحقل المركزي الدافع :

في هذه الحالة تتجه القوة المؤثرة على الجسيم بعيداً عن مركز الحقل فيكون تابع القوة موجياً ،  $\frac{-D}{r^2} = f(r) > 0$  ، وهذا يستوجب عندئذ أن يكون الثابت  $D$  سالباً (  $D < 0$  ) . وتنطبق على هذه الحالة

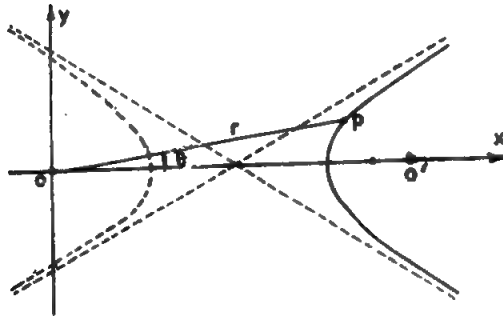
حالة حقل التدافع الكهربائي بين شحنة ثابتة وشحنة متحركة تتفق معها بالاشارة . وإذا حسبنا الطاقة الكلية للجسيم :

$$E = T + V = \frac{1}{2} mv^2 - \int_{\infty}^r \frac{-D}{r^2} dr \quad (47)$$

وجدنا أن :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{D}{r} > 0 \quad (48)$$

فالطاقة الكلية موجبة حتماً لأن  $D < 0$  . نستنتج من ذلك أن المسار قطع زائد أحد محرقه هو مركز الحقل ، كما يبين الشكل ( 4 ) . ولما



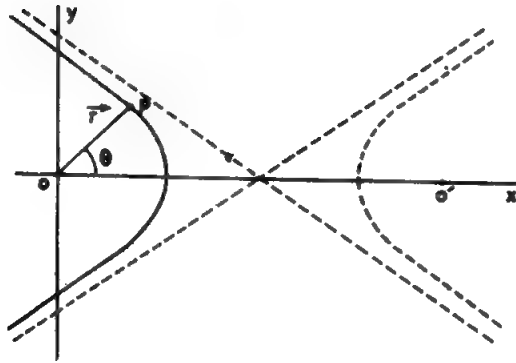
الشكل ( 4 )

كان لاقطع الزائد فرعان فيجب أن نحدد ما إذا كان الجسم يتحرك على الفرع الأول أو الثاني . لكن كون الحقل دافعا والوسيط p سالبا ، لأن D سالبة ، يحتم أن تكون الحركة على الفرع الذي لا يحوي مركز الحقل كمحرق . فإذا كانت O مركز الحقل فالمسار هو الفرع المستمر من القطع .

### ب - حالة الحقل المركزي الجذاب :

تتجه القوة في هذه الحالة نحو مركز الحقل كما في حالة حركة كتلة مادية حول كتلة أخرى أو حالة حركة جسم مشحون حول شحنة تنحافه بالاشارة . وتكون الطاقة الكلية في هذه الحالة

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{D}{r}$$



الشكل ( 5 )

موجبة أو سالبة أو معدومة وذلك حسب شروط البدء ، إذ أن الطاقة الكلية هنا محفوظة ( ثابتة ) .

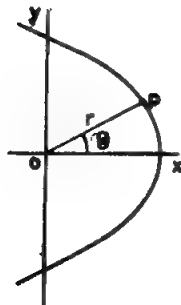
$$E = E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{D}{r_0}$$

وسنعتبر لذلك الحالات الثلاث التالية :

اولا :  $v_0^2 > \frac{2D}{mr_0}$  . في هذه الحالة

تكون  $E = E_0 > 0$  وبالتالي فالسار قطع زائد . والفرع المقبول هو الذي يحوي

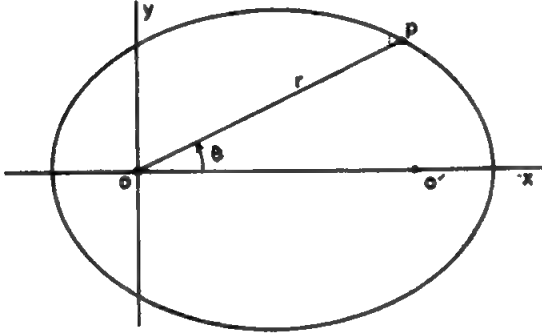
مركز الحقل كمحرق له . وهذا ما يمثله الشكل ( 5 ) .



الشكل ( 6 )

ثانياً : إذا كان  $v_0^2 = \frac{2D}{mr_0}$  فإن  $E = E_0 = 0$  ويكون التباعد المركزي للقطع مساوياً الواحد ( $e = 1$ ) والمسار قطع مكافئ. محرقه مركز الحقل  $O$  ، كما يبين الشكل (6) .

ثالثاً : وأخيراً إذا كان  $v_0^2 < \frac{2D}{mr_0}$  فإن  $E = E_0 < 0$  ويكون  $e < 1$  . وعندئذ يكون المسار قطعاً ناقصاً أحد محرقيه هو مركز الحقل  $O$  كما يبين الشكل (7) .



الشكل ( 7 )

**ملاحظة :** من الحركات التي تنطبق عليها الدراسة السابقة ما يلي :  
 آ - حركة النيازك والمذنبات التي ترسم قطعاً زائدة وربما مكافئة وهي تأتي من الفضاء وتمر بالقرب من الشمس ثم تأخذ بالابتعاد عنها وتغادر المجموعة الشمسية دون أن تعود إليها . كما أن هناك بعض الكتل المادية التي تأخذ حركة مشابهة حول الأرض .

ب - حركة الكواكب حول الشمس كالأرض مثلاً وهي تسير على قطع ناقص تشكل الشمس محرقاً لها . وسندرس في الفقرة التالية هذه الحركة بالتفصيل نظراً لأهميتها . وتكمن هذه الدراسة في مناقشة قوانين كبلر الفلكية .

ج - حركة الالكترون حول النواة بتأثير حقلها الكهربائي المتمركز فيها حيث يرسم الالكترون قطعاً ناقصاً محرقها النواة .

د - حركة جسيم  $\alpha$  أو البروتون جانب النواة حيث يرسم قطعاً زائداً يقع محرقه البعيد في مركز الحقل الكهربائي للنواة أو في النواة .

### VIII - قوانين كبلر الفلكية :

لقد وضع كبلر قوانينه في الحركة الفلكية قبل أن يضع نيوتن قوانين الميكانيك . وتنص قوانين كبلر على ما يلي :

**القانون الاول :** إن مسار كل كوكب حول الشمس قطع ناقص تقع الشمس في أحد محرقه .

**القانون الثاني :** إن شعاع الموضع الذي مبدؤه الشمس ونهايته الكوكب المتحرك يسمح سطوحاً متساوية في أزمنة متساوية ( أي أن الحركة الفلكية خاضعة لقانون السطوح ) .

**القانون الثالث :** ان مربع دور حركة الكوكب حول الشمس يتناسب مع مكعب نصف المحور الكبير لمساره .

لكي نبرهن على صحة قوانين كبلر هذه ندرك أولاً أن الكوكب أثناء حركته يخضع لحقل قوى مركزي هو حقل جاذبية الشمس للكوكب وهو حقل متناسب عكساً مع مربع البعد بين الكوكب والشمس ( بل بين مركزيهما ) . ولذا تنطبق عليه الدراسة السابقة . وقد رأينا عندئذ أن المسار هو قطع ناقص مركز القوة أحد محرقه ، وأن الحركة خاضعة لقانون السطوح كخاصة من خواص الحركة في الحقل المركزي . فالقانون الأول والثاني إذاً مبرهنان سلفاً . ويبقى أن نبرهن على صحة قانون كبلر الثالث . إذا كان  $a$  و  $b$  نصفي المحورين الكبير والصغير للمسار فإن مساحة السطح الذي يحصره المسار يعطى بالعلاقة :

$$A = \pi a b \quad (49)$$

وقد رأينا سابقاً ان السرعة السطحية تغطي بالملاقة

$$A' = \frac{dA}{dt} = h / 2 \quad (50)$$

إن دور الحركة هو الزمن اللازم ليقطع الكوكب مساره مرة واحدة أو ليمسح شعاع موضعه سطح المسار . اذاً فالدور :

$$P = \frac{A}{A'} = 2 \pi a b / h \quad (51)$$

ولكي نتخلص من  $h$  في هذه الملاقة نستعمل الملاتين التاليتين للوسيط  $p$  الأولى

$$p = mh^2 / D \quad (52)$$

وهي التي وجدناها سابقاً ، والثانية

$$p = a(1 - e^2) \quad (53)$$

وهي من خواص القطع الناقص . وبمحذف الوسيط  $p$  بين هاتين الملاتين الاخيرتين نجد :

$$h^2 = \frac{D}{m} a (1 - e^2) \quad (54)$$

كما ان من خواص القطع الناقص الملاقة

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \quad (55)$$

وأخيراً باستعمال (54) و (55) في علاقة الدور (51) نجد :

$$P = 2 \pi \sqrt{m / D} a \sqrt{a} \quad (56)$$

أو :

$$P^2 = (4 \pi^2 m / D) a^3 \quad (27)$$

وهذه الملاقة مكافئة لنص قانون كبلير الثالث الذي ينص على ان مربع الدور متناسب مع مكعب نصف المحور الكبير للمسار . وبذلك نكون قد اثبتنا قوانين كبلير استناداً إلى خواص الحقل المركزي . ونلخص في الجدول التالي بعض المعلومات الفلكية عن مجموعتنا الشمسية .

# IX- معلومات فلكية حول المجموعة الشمسية

الشمس	عطارد	الزهرة	الأرض القمر	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
متوسط بعده عن الشمس ( مليون كيلومتر ) سنته ( دور حركته حول الشمس ) نسبة قطر دائرته الاستوائية ( سنة أرضية ) ( الف كم ) كتلته ( $10^{24}$ كيلوجرام ) .	58.5	108	150 0.384 1 0.075	227 عن الأرض 1.9 حول الأرض 3.4	778	1427	2871	4498	5910
2000000	0.32	4.9	5.98 0.074	0.64	1900	750	87	103	5.4
1.42	5.3	4.95	5.52 3.34	3.95	1.33	0.70	1.56	2.28	400
متوسط كتلته (قرام/سم <sup>3</sup> ) متوسط تسارع الجاذبية على سطحه (متر/ثا <sup>2</sup> ) سرعة الهروب أو التخطي منه ( كيلومتر/الثانية ) يوهه ( او دور حركته حول محوره ) ( ساعة ) متوسط سرعته على مداره ( كيلومتر/الثانية ) .	273	8.5	9.8 1.62	3.8	26	11.2	9.4	15	8
620	4.2	10.2	11.2	5	61	37	22	25	10
607.5	2212	720	23.9 655	24.6	9.84	10.9	10.8	15.7	16
—	48	35	29.8 1.02	24	13	9.65	6.8	5.44	4.75





## الفصل الرابع

### فانون التجاذب الكوني

- فانون التجاذب الكوني
- قوة جذب قضيب لجسيم على مستوى تناظره
- قوة جذب كرة جوفاء متجانسة لجسيم خارجها
- قوة جذب كرة جوفاء لجسيم داخلها
- قوة جذب كرة سميكة جوفاء لجسيم خارجها او داخلها
- قوة جذب كرة صماء لجسيم خارجها او داخلها
- قوة جذب حلقة دائرية منتظمة لجسيم على محورها
- قوة جذب قرص دائري متجانس لجسيم على محوره



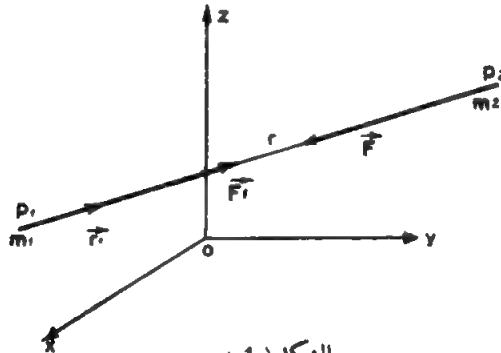
## I - قانون التجاذب الكوني :

لقد درس نيوتن قوانين كبلير التي صاغها لدراسة حركة الكواكب ثم فسرهما بقانونه الجديد في التجاذب الكوني . وينص هذا القانون على أن كل جسيمين ماديين يتجاذبان بقوة تتناسب طردياً مع كل من كتلتيهما وعكساً مع مربع المسافة بينهما . ويعبر عن القوة  $\vec{F}$  التي يجذب بها الجسيم ذو الكتلة  $m_1$  جسيماً آخر ذا كتلة  $m_2$  بالعلاقة :

$$\vec{F} = - \frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{r}_1 \quad (1)$$

حيث  $r$  هو البعد بين الجسيمين و  $\vec{r}_1$  شعاع واحدة المحور الموجه من الجسيم الأول ( الجاذب ) إلى الجسيم الثاني ( المجنوب ) ، وحيث  $G$  ثابت يسمى ثابت التجاذب الكوني وهو يمثى في الجلة السفلية ( CGS ) بالمقدار :

$$G = 6.673 \times 10^{-8} \text{ Cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Sec}^{-2} \quad (2)$$



أما القوة التي يجذب الجسيم الثاني بها الجسيم الأول ، ولتكن  $\vec{F}'$  ، فهي تماكس مباشرة القوة الأولى  $\vec{F}$  ، الشكل (1) أي :

$$\vec{F}' = - \vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_1 \quad (3)$$

وقد افترضنا في ذلك أن المحور لا زال موجهاً من الجسم الأول إلى الجسم الثاني . أما إذا اصطَلَحنا على أن يكون التوجيه للمحور الذي يحمل القوة هو من الجسم الجاذب نحو الجسم المجنوب دائماً فإن  $\vec{F}$  و  $\vec{F}'$  يعبر عنها بعلاقة واحدة هي (1) .

لما كان شعاع الواحدة  $\vec{r}_1$  يعطى بالعلاقة  $\vec{r}_1 = \vec{r}/r$  ، كما رأينا سابقاً ، فإن إسقاط العلاقة (1) على المحاور الإحداثية  $ox$  ,  $oy$  ,  $oz$  يعطي مركبات القوة  $F_x$  و  $F_y$  و  $F_z$  على هذه المحاور . أي :

$$F_x = - G \frac{m_1 m_2}{r^3} x \quad (4)$$

$$F_y = - G \frac{m_1 m_2}{r^3} y \quad (5)$$

$$F_z = - G \frac{m_1 m_2}{r^3} z \quad (6)$$

هذا ، ونلاحظ أن حقل التجاذب الكوني ، ويسمى كثيراً من الأحيان بالتجاذب النيوتني ، والمبر عنه بالعلاقة (1) هو حقل مشتق من كمون .

$$V(r) = - \int_{\infty}^r f(r) dr = - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (7)$$

والعلاقة الأساسية بين الحقل  $\vec{F}$  والكمون الذي يشتق منه هذا الحقل :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \text{Grad } V (r) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \end{aligned} \quad (8)$$

تأخذ الشكل التفصيلي :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} x = - F_x \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} y = - F_y \quad (10)$$

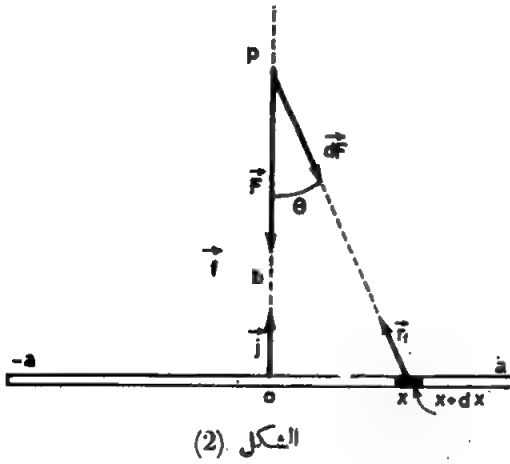
$$\frac{\partial V}{\partial z} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} z = - F_z \quad (11)$$

ان ما تقدم قد تناول قوة التجاذب بين جسيمين نقطيين . أما اذا كان الجثمان المتجاذبان غير نقطيين فان قوة التجاذب بينهما تحسب استناداً الى العلاقة (1) بحساب القوة المتبادلة بين عنصرين تفاضليين من الجسمين واجراء عملية تكامل شعاعية تشمل جميع نقاط أو عناصر الجسمين المتجاذبين . وسنعالج فيما يلي بعض الحالات الهامة في حساب حقول جاذبية بعض الأجسام الهندسية .

## II — قوة جذب قضيب رفيع لجسيم في مستوى تناظره:

ان القوة  $d\vec{F}$  التي تؤثر في جسيم كتلته  $m$  والناتجة عن عنصر صغير من القضيب  $dx$  في جوار  $x$  ، انظر الشكل (2) ، هي :

$$d\vec{F} = -G \frac{m\sigma dx}{x^2 + b^2} \vec{r}_1 \quad (12)$$



وذلك بتطبيق قانون التجاذب الكوني المعطى بالعلاقة (1) ، حيث في العلاقة الأخيرة  $\sigma$  هي الكثافة الطولية للقضيب و  $\sigma dx$  كتلة المنصر  $dx$  و  $x^2 + b^2$  هو مربع البعد بين المنصر المذكور والجسيم P . وليس صعباً أن نرى أن القوة

الكلية  $\vec{F}$  الناتجة عن هذا القضيب بكامله واقمة على محور التناظر OP الذي يبينه الشكل (2) وذلك بسبب التناظر . ولهذا السبب لا يهمنا الآن الا مركبة  $d\vec{F}$  على ذلك المحور وهي :

$$\begin{aligned} (d \vec{F})_r &= - G \frac{m \sigma dx}{x^2 + b^2} \cos \theta \\ &= - G \frac{m \sigma dx}{x^2 + d^2} \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

ونحصل على القوة الكلية  $\vec{F}$  بتكامل العلاقة الأخيرة على طول القضيب  
آخذين بعين الاعتبار أن  $\vec{F}$  محمولة على OP . هذا يعطى :

$$\vec{F} = F \vec{j} = \int_{-a}^a - G \frac{m \sigma b dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (14)$$

وبإنجاز عملية التكامل نجد :

$$\vec{F} = - G \frac{2 m \sigma a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{j} = - G \frac{m M}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{j} \quad (15)$$

حيث  $M = 2 a \sigma$  هي كتلة القضيب الذي طوله  $2 a$  .

### III - قوة جذب كرة جوفاء متجانسة لجسيم خارجها :

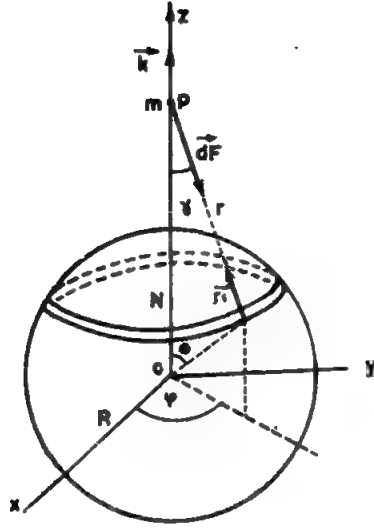
لنحسب الآن قوة الجذب التي تؤثر بها كرة مادية جوفاء متجانسة كثافتها السطحية  $\sigma$  على جسيم واقع خارج هذه الكرة على بعد  $b$  من مركزها .  
لنعتبر الاحداثيات الكروية  $(r, \theta, \varphi)$  ولنحسب القوة المؤثرة في الجسيم P  
والناجمة عن عنصر سطحي تفاضلي  $ds$  .

$$ds = R \sin \theta d \varphi R d \theta \quad (16)$$

القوة الناجمة عن هذا العنصر هي :

$$\begin{aligned} d \vec{F} &= - G \frac{m \sigma ds}{r^2} \vec{r}_1 \\ &= - G \frac{m \sigma R^2 \sin \theta}{r^2} d \theta d \varphi \vec{r}_1 \end{aligned} \quad (17)$$

فاذا كاملنا على المتحول الزاوي  $\varphi$  الذي يتحول بين 0 و  $2\pi$  حصلنا



الشكل (3)

على القوة الناتجة  
عن الحلقة التي  
يمثلها الشكل (3).  
وهذه القوة محمولة  
على OP بسبب  
التناظر . ولذلك  
فاننا نكمل مسقط  
الملاقة الأخيرة على  
المحور OP بدلاً  
منها ذاتها . هذا  
التكامل يؤدي  
الى ما يلي :

$$\begin{aligned} dF_1 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} dF \cos \gamma \\ &= -G \frac{2\pi m \sigma R^2 \sin \theta}{r^3} d\theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (18)$$

أما القوة الكلية  $\vec{F}$  المحمولة على OP أيضاً بسبب التناظر فنحصل عليها  
من تكامل الملاقة الأخيرة بالنسبة لـ  $\theta$  من 0 الى  $\pi$  .

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\pi} dF_1 \vec{k} \quad (19)$$

حيث  $\vec{k}$  شعاع واحدة OP . وباستعمال (18) يكون :

$$\vec{F} = F \vec{k} = \int_{\theta=0}^{\pi} -G \frac{2\pi m \sigma R^2 \sin \theta \cos \gamma}{r^2} d\theta \vec{k} \quad (20)$$

لكن الشكل يبين أن :

$$r = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \Theta} \quad (21)$$

$$\cos \gamma = \frac{b - R \cos \Theta}{r} \quad (22)$$

$$= \frac{b - R \cos \Theta}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \Theta}} \quad (23)$$

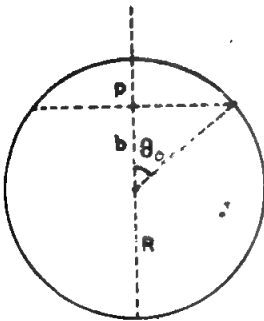
حيث  $R$  نصف قطر الكرة و  $b$  بعد الجسم  $P$  عن مركز الكرة .  
وأخيراً يؤدي استعمال ( 21 ) و ( 23 ) في ( 20 ) وإجراء التكامل إلى  
القوة المطلوبة حيث نجد :

$$\vec{F} = - G \frac{4\pi \sigma R^2 m}{b^2} \vec{k} \quad (24)$$

$$= - G \frac{m M}{b^2} \vec{k} \quad (25)$$

وتدلنا العلاقة ( 25 ) ، التي فيها  $M = 4\pi \sigma R^2$  كتلة الكرة ، على  
أن قوة جذب الكرة الجوفاء لجسم خارجها تساوي القوة الناتجة فيما لو  
اعتبرنا كتلة الكرة متجمعة في مركزها . ولهذا النتيجة أهمية كبرى من  
الناحية التبسيطية .

#### IV - قوة جذب كرة جوفاء لجسيم داخلها :



(الشكل 4)

لنفرض الآن أن الجسم  
واقع داخل الكرة الجوفاء  
المتجانسة التي رأيناها في الفقرة  
الأخيرة . ولنستعمل الرموز  
السابقة ذاتها، كما بين الشكل (4) .  
لنأخذ المستوي المار من موضع  
الجسم  $P$  متعامداً مع  $OP$  . هذا  
المستوي يقسم الكرة إلى قيتين

العليا، وتحاول جذب الجسم بقوة نحو الأعلى، والسفلى ونحاول جذبه نحو



الأسفل . لهذا السبب يجب فصل التكامل السابق الى تكاملين الأول على القبة العليا من الكرة والثاني على القبة السفلى منها . أي :

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} dF_1 \vec{k} + \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\pi} dF_2 \vec{k} \quad (26)$$

أما انجاز هذا التكامل فيترك كتمرين وتؤدي نتيجته الى أن القوة  $\vec{F}$  معدومة.

$$\vec{F} = 0 \quad (27)$$

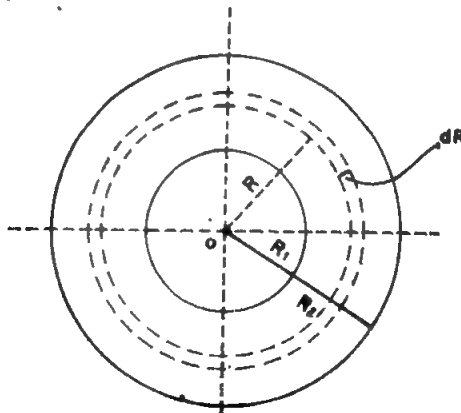
فالجسيم داخل الكرة الجوفاء المتجانسة لا يخضع لقوة جاذبة ناتجة عن هذه الكرة.

### V — قوة جذب كرة سميكة جوفاء لجسيم خارجها او داخلها :

إذا كانت الكرة الجوفاء سميكة وكان نصف قطرها الداخلي والخارجي هما  $R_1$  و  $R_2$  بالترتيب فان الحصول على قوة جذب هذه الكرة المتجانسة يتم بأن نأخذ أولاً القوة  $dF$  الناتجة عن قشرة كروية نصف قطرها  $R$  وسمكها  $dR$  ونكامل بين  $R = R_1$  و  $R = R_2$  ، أي أننا نمتد على نتيجتي الفقرتين السابقتين . ان القوة الناتجة عن القشرة الكروية المذكورة هي :

$$d\vec{F} = -G \frac{4\pi R^2 \sigma dR}{b^2} \vec{k} \quad (28)$$

حيث  $\sigma$  هي الكثافة الحجمية وحيث  $4\pi R^2 dR$  تمثل حجم هذه القشرة . انظر الشكل (5) . هذه القوة تؤثر على الجسيم الموضوع خارج الكرة



الشكل (5)

(  $R_2 < b$  ) . ونحصل بالتكامل على القوة :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_{R=R_1}^{R=R_2} - G \frac{4\pi R^2 \sigma dR}{b^2} = - \left[ \frac{G \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma m R_2}{b^2} \right]_{R_1}^{\rightarrow k} \\ &= - G \frac{\frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) \sigma m}{b^2} \vec{k} \\ &= - G \frac{m M}{b^2} \vec{k} , \quad R_2 < b \quad (29)\end{aligned}$$

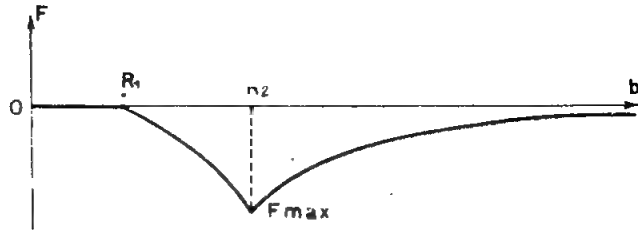
ونجد هنا أيضاً أن قوة جذب الكرة لجسيم خارجها تساوي قوة جذب كتلة هذه الكرة فيما لو وضعت كلها في مركزها .

أما إذا وقع الجسيم داخل هذه الكرة السميكة أي (  $R_1 > 0$  ) فليس من الصعب أن نرى أن القوة الناتجة عن هذه الكرة ممدومة لأن كل قشرة كروية لا تؤثر على الجسيم الذي تحويه في داخلها . والتكامل لا يغير هذه الحقيقة أي أن :

$$\vec{F} = 0 \quad \text{و} \quad R_1 > b \quad (30)$$

وأخيراً ، إذا وقع الجسيم ضمن الكرة السميكة (  $R_2 > b > R_1$  ) فإن الجسيم لا يخضع لجذب من قبل الجزء الخارجي من الكرة بالنسبة لهذا الجسيم أي من أجل  $R > b$  ولذلك فإن التكامل الذي يعطي القوة الكلية يمتد بين  $R = R_1$  و  $R = b$  . إذاً :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_{R=R_1}^{R=b} - G \frac{4\pi R^2 \sigma dR}{b^2} \vec{k} \\ &= - G \left[ \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma}{b^2} \right]_{R_1}^b \vec{k} \\ &= - G \frac{\frac{4}{3}\pi (b^3 - R_1^3) \sigma m}{b^2} \vec{k} , \quad R_2 > b > R_1 \quad (31)\end{aligned}$$



الشكل (6)

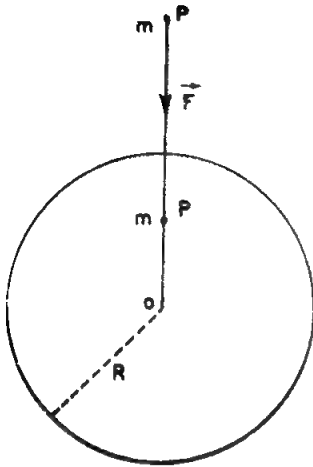
ويمثل الشكل (6) تحولات القوة الجاذبة عندما ينتقل الجسم من مركز الكرة ثم يخرج منها مبتعداً إلى اللانهاية . تبقى القوة معدومة مادام الجسم داخل الكرة الداخلية ( $b < R_1$ ) . تزداد بعد ذلك متأثرة بعاملين هما ازدياد الكتلة ( يزداد القوة ) وازدياد البعد (ينقصها) لاحظ الحدين  $G \frac{4\pi\sigma m R_1^3}{b^2}$  وهو خطي في  $b$  و  $-G \frac{4\pi\sigma m b^3}{3b^2}$  المتناسب عكساً مع مربع البعد . لكن الحد الأول أكبر بقيمته المطلقة مما يؤدي إلى التغير المشاهد بين  $R_1$  و  $R_2$  حيث تبلغ شدة القوة قيمتها العظمى :

$$F_{max} = -G \frac{mM}{b^2}$$

حين يكون الجسم في  $R_2$  . بعد ذلك تعود القوة إلى التناقص بالقيمة المطلقة إلى أن تنعدم عندما يصبح الجسم في اللانهاية .

#### VI — قوة جذب كرة صماء لجسيم خارجها أو داخلها :

يمكننا أن نستنتج قوة الجذب في هذه الحالة من الحالة السابقة للكرة



الشكل (7)

لجوفاء السميكة . فالقابلة بين الحالتين  
تبين أن  $R_1 = 0$  في الحالة الجديدة .  
ولدينا عندئذ حالتان فقط : في الأولى  
يكون  $b < R$  وفي الثانية  $b > R$  ،  
حيث  $R = R_2$  هو نصف قطر الكرة  
الصماء . و  $b$  بعد الجسم عن مركز  
الكرة . ففي الحالة الأولى ، نستنتج  
من تطبيق المعادلة ( 31 ) أن :

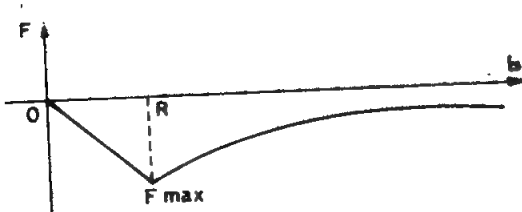
$$F = -G \frac{4 \pi m \sigma b^3}{3 b^2} \vec{k} \quad , \quad b < R \quad \text{أو :}$$

$$F = - \frac{4}{3} G \pi m \sigma b \vec{k} \quad (32)$$

وهي حالة جسم داخل الكرة . أما في حالة وقوع الجسم خارج الكرة  
فيقودنا تطبيق العلاقة ( 29 ) الى العبارة :

$$F = -G \frac{mM}{b^2} \vec{k} \quad , \quad b > R \quad (33)$$

تدل العلاقة ( 32 ) على أن قوة الجاذبية داخل الكرة تتناسب طردياً  
مع بعد الجسم عن مركز الكرة . ولذلك فان القوة  $F$  تتحول تحولاً خطياً  
بين المركز والسطح ، كما يمثل الشكل ( 8 ) . أما خارج الكرة فان القوة



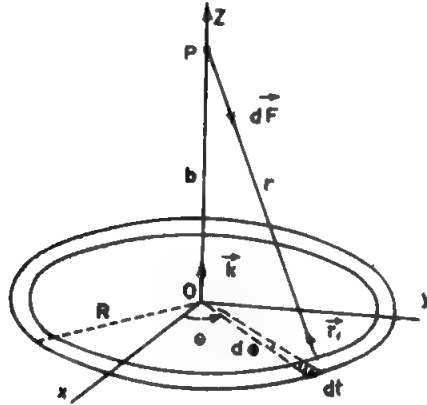
الشكل (8)

تناسب عكساً مع مربع ذلك البعد .

## VII - قوة جذب حلقة دائرية منتظمة لجسيم على محورها :

لنعتبر حلقة مادية دائرية نصف قطرها  $R$  وكثافتها الخطية  $\sigma$  كالتي يمثلها

الشكل (9) . ان القوة  $\vec{dF}$  الناتجة عن عنصر خطي  $d\ell = R d\theta$  والتي تجذب جسيماً واقفاً على محور الحلقة هي :



الشكل (9)

$$d\vec{F} = -G \frac{m \sigma R d\theta}{r^2} \vec{r}_1 \quad (34)$$

ولما كانت القوة الجاذبة الكلية  $\vec{F}$  محمولة على محور الحلقة بسبب تناظر

هذه الحلقة فلا يهنا الا المركبة على هذا المحور للقوة  $d\vec{F}$  .

فبالاسقاط عليه ومكاملة مسقط  $d\vec{F}$  نجد :

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{2\pi} -G \frac{m \sigma R d\theta}{r^2} \cos \gamma \vec{k} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} -G \frac{m \sigma R d\theta}{r^2} \frac{b}{r} \vec{k} \\ &= -G \frac{m (2\pi R \sigma) b}{r^3} \vec{k} \\ &= -G \frac{m M b}{(R^2 + b^2)^{3/2}} \vec{k} \end{aligned} \quad (36)$$

لمعرفة كيف تتحول قوة الجذب هذه بتحول البعد  $b$  يلاحظ أن مشتق القيمة الجبرية للقوة هو :

$$F' = -(GmM) \left[ (b^2 + R^2)^{-3/2} - 3b^2 (b^2 + R^2)^{-5/2} \right] \quad (37)$$

أما المشتق الثاني فهو :

$$F'' = - (G m M) b (b^2 + R^2)^{-7/2} (7R^2 - 8b^2) \quad (28)$$

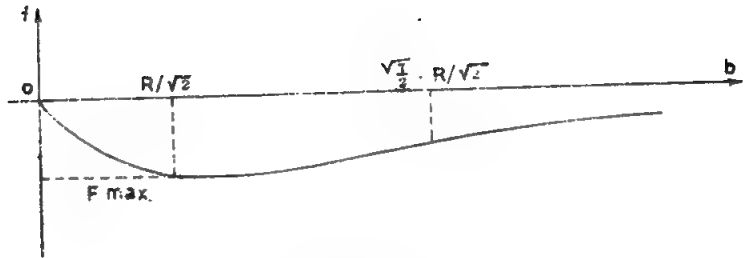
نستخدم المشتق الأول عندما  $b=R/\sqrt{2}$  حيث تبلغ  $F$  قيمتها الدنيا (نبتتها العظمى المطلقة) ، كما يبين الشكل (10) . أما المشتق الثاني

فينعدم عندما  $b = \frac{\sqrt{7}}{2} R / \sqrt{2}$  ويكون موجبا من أجل  $b < \frac{\sqrt{7}}{2} R / \sqrt{2}$

دالاً على أن  $F$  يتقعر منحنياً نحو الاعلى . كما ان المشتق الثاني يكون سالباً

من أجل  $b > \frac{\sqrt{7}}{2} R / \sqrt{2}$  أي أن منحنى  $F$  يتحدب نحو الاعلى كما

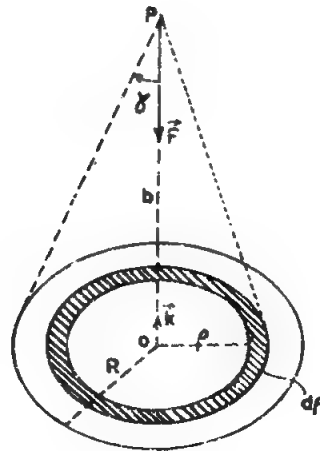
يتضح في الشكل (10) . وتنحدر القوة نحو الصفر عندما يعتمد الجسم نحو اللانهاية .



الشكل (10)

### VIII - قوة جذب قرص دائري متجانس لجسيم على محوره :

نستخلص هذه الحالة من سابقتها ، حالة الحلقة ، وذلك بأخذ حلقة  
عنصرية من القرص نصف قطرها  $a$  وعرضها  $da$  ، كما يبين الشكل (11) .  
القوة الناتجة عن هذه الحلقة محولة على محور التناظر وتساوي :



الشكل (11)

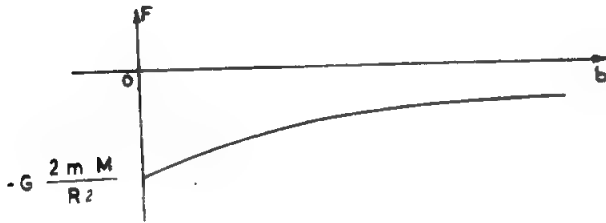
$$\vec{dF} = -G \frac{m(2\pi\sigma\varrho d\varrho) b}{(\varrho^2 + b^2)^{3/2}} \quad (39)$$

وبتكامل العبارة (39) بين  $\varrho=0$  و  $\varrho=R$  نجد :

$$\vec{F} = -2\pi\sigma m G b \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \frac{\varrho d\varrho}{(\varrho^2 + b^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (40)$$

$$\vec{F} = -G \frac{2mM}{R^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + R^2}} \right] \vec{k} \quad (41)$$

وبدراسة  $F$  ومشتقاتها نجد أنها تتحول كما يبين الشكل (12). وتكون شدة القوة عظمى عندما يكون الجسم على القرص ثم تتناقص على النحو المبين.



الشكل (12)

\* \* \*



## الفصل الخامس

### حركة الجسيم المشحون في حقل كهربائي

- حركة جسيم مشحون في حقل كهربائي
- حركة جسيم مشحون في حقل مغناطيسي منتظم
- مطياف الطاقة ومطياف الكتلة
- السرعات الرئوية
- حركة جسيم مشحون تحت تأثير حقلين كهربائي ومغناطيسي



إن القوانين التي تمسّن الحقول الكهربائفة والمغناطيسفة الناففة عن  
توزعات مختلفة للشحنات الكهربائفة والتيارات الكهربائفة هي من موضوعات  
النظرفة الكهربائفسفة . أما حركة الجسفات المشحونة تحت تأثير قوى كهربائفة  
ومغناطيسفة فهف مسألف ميكائفسفة ففبدر بنا أن نعالفها هنا .

لنكن  $q$  و  $\vec{r}$  شحنة وشماع موضع جسم متحرك فف حقل كهربائف  
 $\vec{E}$  . من المعروف أن هذا الجسم ففخضع لقوة كهربائفة ( قوة ناشفة عن  
الحقل الكهربائف ) معطاة بالعلاقة :

$$\vec{F}_e = q \vec{E} \quad (1)$$

فف ففبسع الحقل  $\vec{E}$  بصورة عامة للموضع والزمن .

واذا وقع الجسم فف حقل مغناطيسف ففجرفسفه  $\vec{H}$  ( تابع للموضع والزمن بصورة  
عامة ) فانه ففخضع عندئذ لتأففر قوة مغناطيسفة ( ناشفة عن الحقل المغناطيسف )  
معطى بالعلاقة :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{H} \quad (2)$$

فف  $v$  سرعة الجسم . وقد كففنا الملاقتف الاخفرتف فف الجملة المعملفة

. MKSA

فاذا اعترفنا الجسم المشحون واقماً تحت تأثير حقلف كهربائف  
ومغناطيسف ، بالاضافة الى حقل الجاذبفة الارصففة، فان القوة الكلية الفف  
ففخضع لها اثناء حركفه هف :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{F}_g = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{H} + m \vec{g} \quad (3)$$

حيث  $\vec{g}$  هو تسارع الجاذبية الأرضية . في كثير من الاحيان يكون الجسم خاضعاً لبعض هذه القوى فقط او تكون بعضها صغيرة مهمة الى جانب الاخرى . وسندرس هنا بعض الحالات الخاصة لاهمية نتائجها وطرق معالجتها .

### I — حركة جسيم مشحون في حقل كهربائي :

سبق أن ذكرنا ان الحقل الكهربائي الذي يخضع له الجسيم هو تابع للزمن ولوضع الجسيم بصورة عامة . فدراسة حركة الجسيم تتطلب معرفة تامة ومسبقة للحقل . ولما كانت تابعة الحقل للكان والزمان يمكن ان تأخذ اشكالاً عديدة ، وذلك حسب نوعية السبب المؤدي الى وجوده ، فليس بإمكاننا ان نعرض لجميع انواع الحقول الممكنة وان نتناول دراسة حركة الجسيم فيها ، ونكتفي لذلك بالملاحظة التالية . اذا كان الحقل منتظماً فان حركة الجسيم المشحون فيه شبيهة تماماً بدراسة حركة القذائف . واما اذا كان الحقل مركزياً انطبقت عليه الدراسة التي اتينا عليها خلال الفصل الثالث ، وليس من الضروري عندئذ ان نعيد ما قيل من قبل .

### II — حركة جسيم مشحون في حقل مغناطيسي منتظم :

نختار جملة المحاور الاحداثية هنا بحيث يكون محورها  $oz$  موازياً للحقل المغناطيسي  $\vec{H}$  ، ونهمل تأثير حقل الجاذبية الارضية للتبسيط . نستطيع الآن ايجاد معادلات حركة الجسيم منطلقين من قانون نيوتن الثاني ، آخذين بعين الاعتبار ان القوة المؤثرة على الجسيم هي المعطاة بالملافة (2) وهي متعامدة مع المحور  $oz$  . نكتب اذاً :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{v} \wedge \vec{H} = q H \vec{v} \wedge \vec{k} \quad (4)$$

باسقاط هذه العلاقة على المحاور الاحداثية نحصل على المعادلات التفاضلية للحركة :

$$\left. \begin{aligned} m x'' &= q H y' & x'' - \omega y' &= 0 \\ m y'' &= -q H x' & y'' + \omega x' &= 0 \\ m z'' &= 0 & z'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

حيث  $\omega = qH / m$

تبين العلاقة الاخيرة من (5) ان حركة مسقط الجسيم على المحور oz ( الموازي للحقل المغناطيسي ) هي حركة منتظمة سرعتها  $v_z$  ثابتة تسمى من شروط البدء . لانحسام دراسة الحركة يكفي ان ندرس حركة المسقط على المستوى oxy . نضرب المعادتين الاوليين من (5) بـ  $y'$  ،  $x'$  على الترتيب ثم جمعها نجد :

$$x' x'' + y' y'' = 0 \quad (6)$$

وتمطى مكاملة هذه العلاقة :

$$x'^2 + y'^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{xy}^2 = \text{Cte} \quad (7)$$

اي ان السرعة الخطية لمسقط الجسيم على المستوى oxy ثابتة الطويلة . واذا ربنا المعادتين المذكورتين من (5) وجمعنا الناتج لوجدنا ان :

$$x''^2 + y''^2 = a_x^2 + a_y^2 = \omega^2 v_{xy}^2 = \text{Cte} \quad (8)$$

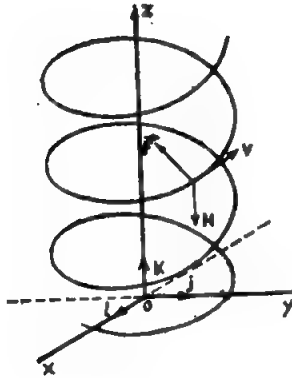
اي ان تسارع المسقط ثابت الطويلة ايضاً . واخيراً ، اذا كاملنا المعادتين مرة واحدة وجدنا :

$$x' = \omega y + C_1 \quad \text{و} \quad y' = -\omega x + C_2$$

وباختيار مناسب لشروط البدء يمكن جعل ثابتي التكامل  $C_1$  ،  $C_2$  معدومين . وعندئذ وبترتيب وجمع هاتين المعادتين نجد :

$$x^2 + y^2 = \rho_{xy}^2 = \frac{v_{xy}^2}{\omega^2} \quad (9)$$

ونلاحظ الآن من العلاقات (7) ، (8) ، (9) أن مسقط الجسم على المستوى  $oxy$  يرسم دائرة بسرعة خطية ثابتة وتسارع مركزي ثابت الطويلة . فالحركة هذه هي إذاً دائرية منتظمة .



الشكل ( 1 )

والآن وباعتبار حركتي المسقطين على المحور  $oy$  والمستوى  $oxy$  بنفس الوقت يتبين لنا أن الجسم يتحرك كما في الشكل (1) ، على لولب اسطوانتي ثابت الخطوة ، ونصف قطر اسطوانته حسب العلاقة الأخيرة هو :

$$e_{xy} = v_{xy} / \omega = m v_{xy} / qH \quad (10)$$

فإذا كانت مركبة السرعة  $v_z$  على المحور  $oz$  الموازي للحقل المغناطيسي معدومة في لحظة البدء كانت حركة الجسيم دائرية في المستوى  $oxy$ ، أو في مستو يوازيه، وذلك حسب شروط البدء. وعندئذ تكون

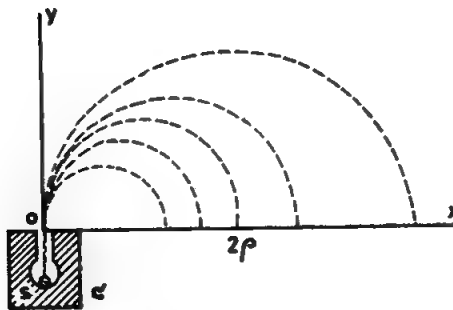
$$e = v / \omega = m v / qH = p / qH \quad (11)$$

حيث  $P$  هو الاندفاع الخطي للجسيم.

هذه العلاقة المهمة تربط بين الحقل وسرعة الجسيم وكتلته وشحنه ونصف قطر مساره الدائري. ولهذه العلاقة أهمية كبرى في المجالات العملية التجريبية للفيزياء. ونبين فيما يلي كيف نستعمل هذه العلاقة في تطبيقين هامين.

### III - مطياف الطاقة ومطياف الكتل :

ليكن  $S$  منبعاً لجسيمات مشحونة ، كالشوارد الفازية الموجبة ، أو جزيئات بيتا ذات الشحنات السالبة ، موضوعاً في بؤقة رصاصية  $C$  ذات فوهة ضيقة ، كما يبين الشكل ( 2 ) . ان المنبع المشع  $S$  يطلق بنفس الوقت جسيمات بيتا ( مثلاً ) ذات كتل متساوية وطاقات حركية مختلفة ( أي سرع مختلفة )



الشكل ( 2 )

تندرج من الصفر حتى قيمة عظمى. ونود الآن استكمال الفكرة التي توصلنا إليها في الدراسة السابقة لمعرفة كيفية توزيع هذه الجسيمات المشحونة بحسب طاقتها. وبعبارة أخرى إذا كان  $N(v)$  المدد النسبي

للجسيمات ذات السرعة  $v$  ، فإننا نرغب في معرفة تغيرات  $N$  بدلالة  $v$  .  
 يتبين من الشكل (2) ان جدران البوتقة تمتص جميع الجسيمات التي  
 تصطدم بها ولا تسمح بالمرور إلا للجسيمات ذات السرعة المتجهة باتجاه  $oy$   
 تقريباً . فاذا طبقنا الآن حقلاً مغناطيسياً منتظماً متعامداً مع المستوى  $oxy$   
 فإن الجسيمات المشحونة عندئذ تتحرك على مسارات دائرية بالسرعة  
 التي خرجت بها من الفوهة  $0$  . وتختلف أنصاف أقطار هذه الدوائر  
 باختلاف سرعتها ، فاذا وضعنا على طول المحور  $ox$  صفيحة حساسة للجسيمات  
 ( كفيلم تصوير مثلاً ) فإن مقدار تأثير الصفيحة في مكان ما يتناسب مع  
 عدد الجسيمات التي سقطت على الصفيحة في ذلك المكان . بقياس القوة  
 النسبية لتأثير الصفيحة نحصل على التوزيع النسبي للجسيمات بدلالة أقطار  
 مساراتها ( أو أنصاف أقطارها ) التي ترتبط بالسرعة وفق العلاقة (11) .  
 فالقوة النسبية لتأثير الصفيحة هي تعبير غير مباشر لتوزيع الجسيمات حسب  
 سرعتها وبالتالي حسب طاقاتها الحركية . ويسمى هذا الجهاز بمطياف الطاقة .

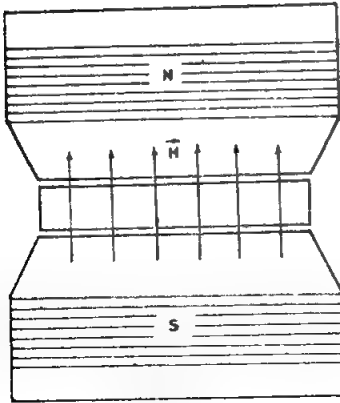
نلاحظ من العلاقة ( 11 ) أنه بإمكاننا دراسة توزيع الجسيمات النسبي  
 حسب كتلتها ( فيما لو كانت مختلفة الكتل ومتساوية السرعة ) . ويمكن في  
 هذه الحالة تسمية الجهاز بمطياف الكتل . ويجدر بالذكر أنه يمكن  
 الاستعاضة عن الصفيحة الحساسة بكاشف للجسيمات المشحونة ( كأنبوب  
 غايغر مثلاً ) يمكن أن ينزلق على المحور  $ox$  . وفي هذه الحالة نستعمله  
 في مواضع مختلفة على هذا المحور ولفترات متساوية في جميع المواضع ،  
 فيعد لنا العدد النسبي للجسيمات . كما يجدر بنا أيضاً أن نلاحظ أن  
 الجسيمات تنحرف نحو اليسار وتسقط على الجزء الأيسر من  $ox$  وذلك فيما  
 اذا كانت شحناتها موجبة ، أي مخالفة لما اعتبرناه فيما أثبتنا على ذكره من  
 هذه الدراسة . والحالة الجديدة تنطبق على جسيمات ألفا  $(\alpha)$  الموجبة  
 وعلى البروتونات الموجبة أيضاً .



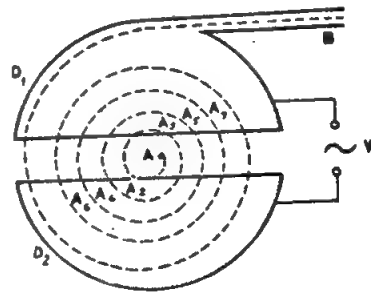
#### IV - السرعات الرحوية :

يمكن الآن أن نتقل إلى تطبيق آخر للمعادلة (11) . وفيه تتناول مبدأ السرعة الرحوي أو السيكلوترون . ويتألف السيكلوترون من صندوقين معدنيين  $D_1$  و  $D_2$  لكل منها شكل حرف D كما بين الشكل (3) . نطبق على الصندوقين حقلاً مغناطيسياً  $H$  منتظماً بواسطة مغناطيس كهربائي .

إن الحقل المغناطيسي منتظم في الفراغ الذي يشغله الصندوقان وفي الفجوة بينهما ومعلوم خارج هذا المجال . يطبق فرق كهربائي متناوب  $V$  بين الصندوقين . ولذلك يكون الحقل الكهربائي بين  $D_1$  و  $D_2$  متناوباً أيضاً وله نفس فواتر فرق الكون  $V$  . أما الحقل الكهربائي داخل كل من الصندوقين فهو معدوم تقريباً لاعتبار الصندوقين مفلقين تقريباً ( باستثناء الفتحتين المتقابلتين ) .



مقطع شاقولي



مقطع أفقي

الشكل (3)

ليكن A منبعاً لجسيمات مشحونة ولنتبع مسار أحد هذه الجسيمات .  
فلما كان الجسيم خاضعاً للحقل المغناطيسي  $\vec{H}$  فإنه يتحرك على دائرة نصف  
قطرها ممعطى بالعلاقة ( 11 ) ولولا وجود الحقل الكهربائي بين الصندوقين  
 $D_1$  ،  $D_2$  لكانت حركة الجسيم منتظمة على دائرة ذات قطر ثابت . إلا  
أنه عملياً لا يستمر بهذا الشكل . فعندما يصل الجسيم الى الموضع  $A_2$  يكون  
الصندوق  $D_1$  موجياً و  $D_2$  سالباً وبالتالي فالحقل بينها يتجه من  $D_2$  إلى  $D_1$  .  
ولذلك فهو يتسارع اثناء مروره بين الصندوقين فتزداد سرعته وبالتالي  
يزداد نصف قطر مساره ، انظر المعادلة ( 11 ) . فاذا وصل الجسيم إلى  
الموضع  $A_3$  يكون الحقل الكهربائي قد تغير بين الصندوقين بحيث يصبح  
متجهاً من  $D_1$  إلى  $D_2$  وكذلك القوة المؤثرة على الجسيم تتجه بنفس الاتجاه  
وبالتالي فإن الجسيم يتسارع من جديد لدى مروره بين الصندوقين .  
وعندئذ يدخل الصندوق الثاني بسرعة أكبر . ولذلك فإنه يرسم  
في الصندوق  $D_2$  نصف دائرة أكبر من تلك التي رسمها في الصندوق  $D_1$  .  
وعندما يصل الموضع  $A_4$  ينقلب اتجاه الحقل من جديد فيعاود الجسيم  
الكرة من جديد فيتسارع ويرسم نصف دائرة أكبر وهكذا ... ففي كل  
مرة يمر الجسيم بين الصندوقين تزداد سرعته ويكبر نصف قطر مساره . فهو  
إذاً يرسم مساراً لولبياً تقريباً . وبعد عدد كبير من الدورات يصبح  
نصف قطر المسار أكبر من نصف قطر الصندوق ويضطر الجسيم  
عندئذ الى مفادرة الصندوق من فتحة B صممت لهذا الغرض . فاذا  
ما خرج الجسيم من B أصبح حالاً غير خاضع للحقل المغناطيسي وبالتالي  
يتابع مسيره وفق خط مستقيم ، بمد أن تكون سرعته قد ازدادت بمد  
دورانه داخل السيكلوترون . فالسيكلوترون إذاً يسرع الجسيمات المشحونة  
على النحو السابق .

نبي الآن ان نلاحظ وجوب توقيت تناوب الحقل الكهربائي مع وصول

الجسيم الى  $A_2$  ،  $A_3$  ،  $A_4$  . . . . . ويحيل اليها لأول وهلة ان الفترات الزمنية التي يستغرقها الجسيم بين هذه الراشع هي فترات غير متساوية مما يجعل تواقف الحقل الكهربائي امراً شاقاً . ولكن هذا خلاف الواقع لأن السرعة الزاوية للجسيم هي :

$$\omega = v/q = qH/m \quad (12)$$

وهي ثابتة لأن  $q$  ،  $H$  ،  $m$  ثابتة كلها . فالزمن اللازم لقطع المسافة بين اي موضعين متتاليين  $A_2$  ،  $A_3$  مثلاً ثابت ويساوي نصف الدور .

$$\tau = \frac{T}{2} = 2\pi / 2\omega = \pi / \omega = \pi m / qH \quad (13)$$

ولذلك فان فترات تناوب فرق الكون  $V$  ، وبالتالي الحقل الكهربائي ، متساوية . ولهذا فان هذا التناوب يتم بشكل بسيط لا صعوبة فيه .

#### V — حركة جسيم مشحون تحت تأثير حقلين كهربائي ومغناطيسي :

ليكن الجسيم خاضعاً لتأثير حقلين منتظمين الاول مغناطيسي والثاني كهربائي، ولنختار جملة الاحداثيات بحيث يكون الحقل المغناطيسي موازياً للمحور  $oz$  والحقل الكهربائي موازياً للمستوى  $oxy$  كما يبين الشكل (4). اي :

$$\vec{H} = H \vec{k} \text{ و } \vec{E} = E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad (14)$$

باتباع طريقة الفقرة السابقة نفسها نجد ان معادلات الحركة هي

$$mx'' = qHy' \quad (15)$$

$$my'' = -qHx' + qE_y \quad (16)$$

$$mz'' = qE_z \quad (17)$$

بقسمة هذه المعادلات على  $m$  تصبح :

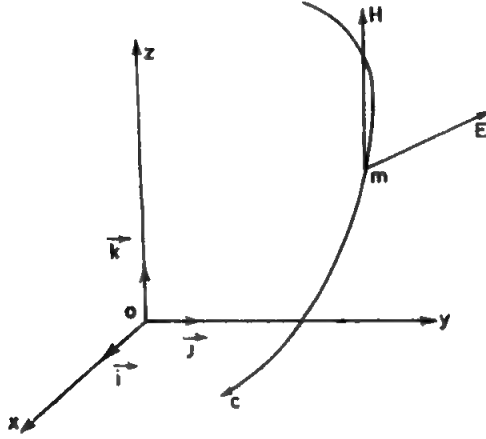
$$x'' - \omega y' = 0 \quad (18)$$

$$y'' + \omega x' = a \quad (19)$$

$$z'' = b \quad (20)$$

حيث :

$$\omega = qH/m , \quad a = qEy/m , \quad b = qE_z/m \quad (21)$$



الشكل ( 4 )

بمكاملة العلاقة (20) مرتين متتاليتين وتطبيق شروط البدء نجد ان حركة مسقط الجسم على  $oz$  متسارعة بانتظام حيث يغطي موضع المسقط بالعلاقة :

$$z = z_0 + z_0 t + \frac{1}{2} bt^2 \quad (22)$$

اما حل المادلتين (18) ، (19) فيعطي حركة المسقط على المستوى  $oxy$  . وللحل نشق الأولى منها ونموض في الثانية ونشتق الثانية ونموض في الأولى فنجد :

$$x'' + \omega^2 x' = a \quad (23)$$

$$y'' + \omega^2 y' = 0 \quad (24)$$

وحل هاتين المعادلتين بالنسبة لـ  $y'$  و  $x'$  بمطبي :

$$x' = A_x \cos (\omega t + \Theta_x) + a/\omega \quad (25)$$

$$y' = A_y \cos (\omega t + \Theta_y) \quad (26)$$

فاذا كاملناها حصلنا على معادلتى الحركة الجبريتين :

$$x = \frac{A_x}{\omega} \sin (\omega t + \Theta_x) + (a/\omega)t + C_x \quad (27)$$

$$y = \frac{A_y}{\omega} \sin (\omega t + \Theta_y) + C_y \quad (28)$$

حيث  $A_x$  ،  $A_y$  ،  $\Theta_x$  ،  $\Theta_y$  ،  $C_x$  و  $C_y$  مجموعة ثوابت يجب تعيينها . ولعلنا نلاحظ هنا بعض الصعوبة في تعيينها من شروط البدء وهي أربعة  $x_0$  و  $y_0$  و  $x'_0$  و  $y'_0$  . وهذه الشروط كافية لتعيين أربعة ثوابت فقط ، وعلينا ان نفتش عن علاقتين بين الثوابت الستة حتى يمكن التعيين بشكل تام . ان ( 27 ) و ( 28 ) هما حلا المعادلتين ( 23 ) و ( 24 ) من المرتبة الثالثة ولذا فان هناك ثلاثة ثوابت تكامل لكل منها . ولقد نتجت معادلتنا المرتبة الثالثة من اشتقاق معادلتى المرتبة الثانية للحركة أي من ( 18 ) و ( 19 ) . فهاتان المجرعتان إذن غير متكافئتين . والحلان ( 27 ) و ( 28 ) غير مقبولين الا إذا حققا المعادلتين الأصليتين . لذلك نموض من المعادلتين (الأصليتين) (27) و (28) في المعادلتين (18) و (19) اللتين يجب أن تتحققا دوماً . فاذا قمنا بهذا التمييز وقسمنا إحدى المعادلتين الناتجتين على الأخرى نتجت لدينا العلاقتان :

$$A_y = A_x = 1 \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} (\omega t + \Theta_y) = - \operatorname{cotg} (\omega t + \Theta_x) \quad (30)$$

أي ان :

$$\theta_y = \theta_x + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2} , \quad \theta_x = \theta \quad (31)$$

ويصبح الحلان x و y بالشكل :

$$x = (A/\omega) \sin (\omega t + \theta) + \frac{a}{\omega} t + C_x \quad (32)$$

$$y = (A/\omega) \cos (\omega t + \theta) + C_y \quad (33)$$

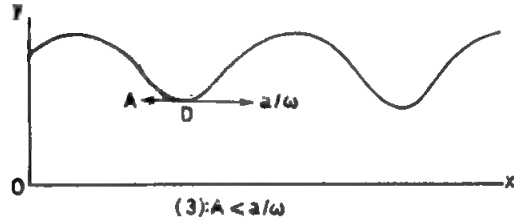
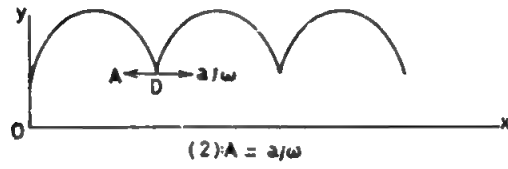
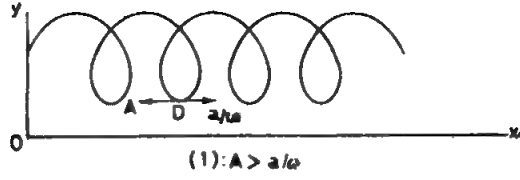
حيث في هاتين العلاقتين اربعة ثوابت فقط هي  $C_y$  ،  $C_x$  ،  $\theta$  ،  $A$  يمكن تعيينها بسهولة من شروط البدء .

لمعرفة شكل المسار في المستوي oxy . نقول إنه لو كانت  $E_y = 0$  فان  $a=0$  وعندئذ تصبح الحركة منتظمة على دائرة مركزها  $(C_x, C_y)$  ونصف قطرها  $A/\omega$  . وهذه الحالة مشابهة لما ورد في الدراسة السابقة ، اي في حالة حقل مغناطيسي فقط .

اذن فتأثير مركبة الحقل  $E_y$  يتمثل بالحد  $(a/\omega)t$  في المعادلة (32) الذي يضيف إلى حركة المسقط حركة انسحابية منتظمة باتجاه المحور ox . والشكل (5) يمثل شكل المسار في المستوى oxy حسب قيمة  $E_y$  .

وليس من الصعب أن نرى من المعادلتين (32) ، (33) ان المسقط على oxy يتحرك على دائرة نصف قطرها  $A/\omega$  بسرعة تساوي A في حين تنسحب هذه الدائرة باتجاه ox بسرعة تساوي  $a/\omega$  .

فاذا اعتبرنا أقرب مواضع المسقط من المحور ox ، كالنقطة D مثلاً فان من السهولة بمكان أن نرى أن للنقطة D سرعتين متعاكستين بالاتجاه الأولى هي السرعة A الناتجة عن الدوران على الدائرة وتتجه نحو اليسار



الشكل ( 5 )

من هذا الموضع والثانية هي السرعة الانسحابية  $a/\omega = E_y/H$  المتجهة نحو اليمين . ونستطيع أن نميز بين الحالات التالية :

أولاً : إذا كان  $A > a/\omega$  كان للنقطة D (المنقط) حركة زائجة والمسار هو من النمط (1) من الشكل (5) .

ثانياً : وإذا كان  $A = a/\omega$  فإن النقطة D تكون ساكنة في هذا الموضع والمسار ذروة عندئذ وهي من النمط (2) .

ثالثاً : وأخيراً إذا كان  $A < a/\omega$  كان للمسار سرعة محصلة سر D نحو اليمين في هذه الحالة والمسار من النمط (3) .





# الفصل السادس

## الجملة الاعطالية

- الجملة الاعطالية
- الجمل النواة
- فاعل الاشتقاق الاول
- المشتق الثاني لشعاع في الجملتين المتحركة والثابتة
- فاعل الاشتقاق الثاني
- السرعة والتسارع
- الجمل المتحركة بصورة عامة
- حركة نقطة مادية حول الارض
- نواس فوكو



## I . الجملة الاعطالية :

عرفنا فيما سبق الجملة المطالية بأنها تلك التي تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للفراغ . أما الجملة التي لا تحقق هذا الشرط فهي جملة لاعطالية كالجل ذات السرعة المتغيرة أو الجل التي يرافق حركتها دوران . فاذا اعتبرنا جملة متمسكة مع الأرض كانت هذه الجملة لاعطالية لأن الأرض نفسها تدور في الفضاء . ولقد رأينا سابقاً أن المبادئ الأساسية للميكانيك ، وهي قوانين نيوتن ، لا تصح إلا في الجل المطالية . ولذلك فإن استعمال هذه القوانين في جل لاعطالية كالأرض يقودنا إلى نتائج خاطئة . وإذا كنا نفعل ذلك في بعض الأحيان تكون النتائج عندئذ تقريبية . وسنرى في هذا الفصل كيف تم دراسة حركة الأجسام في مثل هذه الجل الاعطالية والتأثيرات الناتجة عن حركة الجملة الاعطالية .

## II - الجل الدوارة :

لتكن الجملة الثابتة في الفراغ oXYZ ولتكن xyz جملة تدور بالنسبة للجملة الثابتة . لنعتبر الشعاع المتغير :

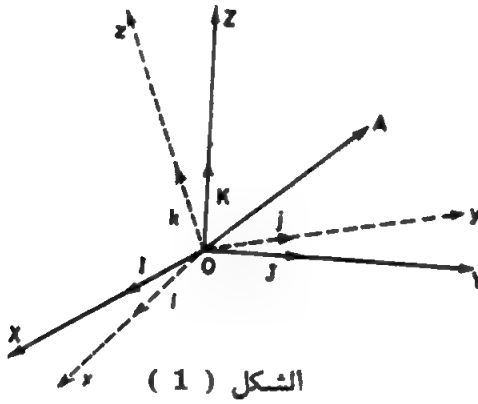
$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \quad (1)$$

حيث المركبات  $A_1$  ،  $A_2$  ،  $A_3$  محمولة على المحاور المتحركة وتابعة

لازم . إن مشتق الشعاع  $\vec{A}$  ، بالنسبة للزمن ، في الجملة المتحركة (النوارة) يعطي بالملاقة :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M = \frac{dA_1}{dt} \vec{i} + \frac{dA_2}{dt} \vec{j} + \frac{dA_3}{dt} \vec{k} \quad (2)$$

حيث يدل الرمز  $M$  على أن الاشتقاق يجري في الجملة المتحركة .



أما بالنسبة للجملة الثابتة  $oXYZ$  فليس الشعاع  $\vec{A}$  وحده هو المتغير بل واشعة الواحدة  $\vec{i}$  ،  $\vec{j}$  ،  $\vec{k}$  نفسها أيضاً لأنها محمولة على محاور تدور (تتغير) بالنسبة للجملة الأخيرة الثابتة . ولذا فان مشتق الشعاع  $\vec{A}$  بالنسبة لهذه الجملة هو :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \frac{dA_1}{dt} \vec{i} + \frac{dA_2}{dt} \vec{j} + \frac{dA_3}{dt} \vec{k} + A_1 \frac{d\vec{i}}{dt} + A_2 \frac{d\vec{j}}{dt} + A_3 \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (3)$$

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + A_1 \frac{d\vec{i}}{dt} + A_2 \frac{d\vec{j}}{dt} + A_3 \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (4)$$

حيث يدل الرمز  $F$  على أن الاشتقاق يجري في الجملة الثابتة .

ولما كانت  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  اشعة واحدة فان مشتق كل منها هو شعاع

واقع في مستوى الشعاعين الآخرين . فمثلا إن المشتق  $\frac{d\vec{i}}{dt}$  للشعاع  $\vec{i}$  هو شعاع متعامد مع  $\vec{i}$  وبالتالي يقع في المستوى  $(\vec{j}, \vec{k})$  . لهذا يمكن أن نكتب :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \vec{j} + a_2 \vec{k} \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = a_3 \vec{k} + a_4 \vec{i} \quad (6)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = a_5 \vec{i} + a_6 \vec{j} \quad (7)$$

ان المركبات  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$  و  $a_5$  و  $a_6$  ترتبط بعضها بملاقات بسيطة يمكن إيجادها بسهولة .

نعم أن  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  وبالتالي :

$$\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = 0 \quad (8)$$

وزى بضرب العلاقة ( 5 ) داخلياً بـ  $\vec{j}$  والعلاقة ( 6 ) بـ  $\vec{i}$  أن :

$$\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = a_4 \quad \vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \quad (9)$$

ومن ( 8 ) و ( 9 ) نرى أن  $a_1 = -a_4$  . وبنفس الطريقة نرى أن  $a_2 = -a_6$  و  $a_3 = -a_5$  . وعندئذ تصبح العلاقات ( 5 ) ، ( 6 ) ، ( 7 ) بالشكل التالي :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \vec{j} + a_2 \vec{k} \quad (10)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = a_3 \vec{k} - a_1 \vec{i} \quad (11)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -a_2 \vec{i} - a_3 \vec{j} \quad (12)$$

وبعد ذلك يمكن أن نكتب :

$$A_1 \frac{d\vec{i}}{dt} + A_2 \frac{d\vec{j}}{dt} + A_3 \frac{d\vec{k}}{dt} = (-a_1 A_2 - a_2 A_3) \vec{i} \\ + (a_1 A_1 - a_3 A_3) \vec{j} + (a_2 A_1 + a_3 A_2) \vec{k} \quad (13)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad (14)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \quad \text{حيث :}$$

$$\omega_1 = a_3, \quad \omega_2 = -a_2, \quad \omega_3 = a_1$$

واخيراً تصبح العلاقة ( 4 ) بالشكل :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad (15)$$

ويسمى الشعاع  $\vec{\omega}$  بالسرعة الزاوية للجملة المتحركة بالنسبة للجملة الثابتة ، كما سنرى بعد قليل .

### III - فاعل الاشتقاق الاول :

نسمي عملية الاشتقاق الممثلة بالرمز  $\frac{d}{dt}$  « بفعل الاشتقاق » الاول

كما نسمي الفاعل الذي يقوم بعملية الاشتقاق وهو  $\frac{d}{dt}$  « بفاعل الاشتقاق » الاول وزمزم له بالرمز D . وعليه يكون :

$$D_F = \left. \frac{d}{dt} \right|_F = \text{فاعل الاشتقاق الاول في الجملة الثابتة}$$

$$D_M = \left. \frac{d}{dt} \right|_M = \text{فاعل الاشتقاق الاول في الجملة المتحركة}$$

والاشتقاق في هذه الحالة بالنسبة للزمن . ويمكن تعميم التعريف من أجل اشتقاق بالنسبة لأي متحول آخر . ويجب ألا يغيب عن الذهن أن هذه الفواعل لا قيمة معينة لها إلا بتطبيقها على مقادير شعاعية .

إذا أخذنا التعاريف السابقة بعين الاعتبار امكن كتابة العلاقة ( 15 ) بالشكل الجديد :

$$D_F \vec{A} = (D_M + \vec{\omega} \wedge) \vec{A} \text{ او } D_F \vec{A} = D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad (16)$$

وعندئذ يمكن كتابة العلاقة بين فاعلي الاشتقاق في الجملتين الثابتة والمتحركة على الشكل

$$D_F = D_M + \vec{\omega} \wedge \quad (17)$$

شريطة تطبيقها على مقادير شعاعية . هذه العلاقة على غاية من الاهمية بالنسبة للاشتقاق من مراتب اعلى كما نرى في الفقرة التالية .

#### IV - المشتق الثاني للشعاع في الجملتين المتحركة والثابتة :

نرى بسهولة ان المشتق الثاني للشعاع  $\vec{A}$  في الجملة المتحركة هو :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} \right|_M &= \left. \frac{d}{dt} \right|_M \left. \frac{d}{dt} \right|_M \vec{A} = D_M D_M \vec{A} = D_M^2 \vec{A} \\ &= \frac{d^2 A_1}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 A_2}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 A_3}{dt^2} \vec{k} \end{aligned} \quad (18)$$

اما المشتق الثاني في الجملة الثابتة فهو :

$$\left. \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} \right|_F = \frac{d}{dt} \left|_F \frac{d}{dt} \right|_F \vec{A} = D_F D_F \vec{A} = D_F^2 \vec{A} \quad (19)$$

ويمكن الحصول عليه من اشتقاق العلاقة (16) في الجملة الثابتة ، أي بتطبيق فاعل الاشتقاق  $D$  على العلاقة المذكورة . وهذا يعطي :

$$D_F D_F \vec{A} = D_F (D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{A})$$

فباستعمال العلاقة (18) نجد :

$$\begin{aligned} D_F^2 \vec{A} &= (D_M + \vec{\omega} \wedge) (D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{A}) \\ &= D_M^2 \vec{A} + D_M (\vec{\omega} \wedge \vec{A}) + \vec{\omega} \wedge D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{A}) \\ &= D_M^2 \vec{A} + (D_M \vec{\omega}) \wedge \vec{A} + 2 \vec{\omega} \wedge D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{A}) \quad (20) \end{aligned}$$

وبإخراج  $\vec{A}$  نرى أن :

$$D_F^2 \vec{A} = [D_M^2 + (D_M \vec{\omega}) \wedge + 2 \vec{\omega} \wedge D_M + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge] \vec{A} \quad (21)$$

V - فاعل الاشتقاق الثاني :

من العلاقة الأخيرة للمشتق الثاني نرى أن فاعل الاشتقاق الثاني في الجملة الثابتة يعطى بالعلاقة :

$$D_F^2 = D_M^2 + (D_M \vec{\omega}) \wedge + 2 \vec{\omega} \wedge D_M + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \quad (22)$$

للحصول على مشتقات من مرتبة أعلى نطبق فاعل الاشتقاق بالترتيب مرات متتالية حتى نحصل على المرتبة المرغوبة . نحصل مثلاً على المشتق الثالث بتطبيق الفاعل (18) على المشتق الثاني المعطى بالعلاقة (21) .

IV - السرعة والتسارع :

لتكن  $p$  نقطة تحرك في الجملة المتحركة  $Oxvz$  . وليكن  $r$  شعاع موضع



هذه النقطة في تلك الجملة . من الواضح أن النقطة  $p$  في الحالة العامة تتحرك بالنسبة للجملة المطالية OXYZ . منمطي الرمز  $I$  للجملة المطالية والرمز  $N$  للجملة اللاعطالية . من الواضح أن سرعة النقطة  $p$  في الجملة اللاعطالية ( المارة ) تعطى بالعلاقة :

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_N = D_N \vec{r} = \vec{V}_N \quad (23)$$

وان تسارعها في هذه الجملة يعطى بالعلاقة :

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_N = D_N^2 \vec{r} = \vec{a}_N \quad (24)$$

أما السرعة والتسارع في الجملة المطالية فيمكن الحصول عليها من العلاقتين (16) و (21) . فالسرعة عندئذ معطاة بالعلاقة :

$$\vec{V}_I = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_I = D_I \vec{r} = D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (25)$$

$$= \vec{V}_N + \vec{V}_{N,I} \quad (26)$$

حيث  $\vec{\omega}$  شعاع طويلته تساوي السرعة الزاوية للجملة المتحركة ( اللاعطالية ) بالنسبة للجملة المطالية ومحمول على محور دوران الجملة اللاعطالية . ويتضح ذلك من أن

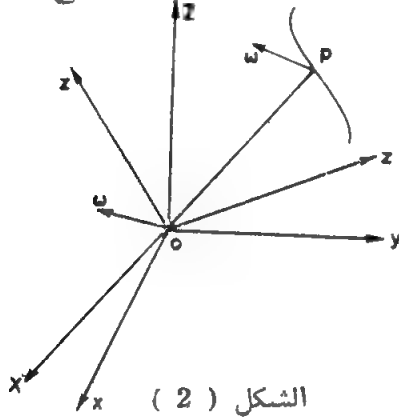
$$\vec{V}_{N,I} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (27)$$

يمثل السرعة الخطية لنقطة ثابتة في الجملة المتحركة وتنطبق في اللحظة  $t$  على النقطة المتحركة  $p$  وتتحرك على محيط دائرة نصف قطرها  $r$  . انظر الشكل (2) . ونسميها لذلك بسرعة « موضع » النقطة المتحركة في اللحظة  $t$  بالنسبة للجملة المطالية . وقول « موضع » النقطة  $p$  ( وهو ثابت في الجملة

المتحركة ( تميزاً له عن النقطة P نفسها ( المتحركة في الجملة المتحركة ).  
وأما التسارع في الجملة العطالية فنحصل عليه من ( 21 ) التي تعطي :

$$\vec{a}_I = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Big|_I = D_M^2 \vec{r} + (D_M \vec{\omega}) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_M \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (28)$$

وستعرف الآن على الحدود المختلفة لهذا التسارع .



يسمى التسارع  $\vec{a}_I = D^2 \vec{r}$  بالتسارع الحقيقي وهو شعاع النقطة P بالنسبة للجملة العطالية . أما التسارع  $\vec{a}_N = D_N^2 \vec{r}$  فيعرف بالتسارع الظاهري للنقطة P وهو تسارعها في الجملة اللاعطالية . وأما مجموع قيم حدود الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة فيشكل تسارع الجملة اللاعطالية  $\vec{a}_{N,I}$  بالنسبة الى الجملة العطالية . ويمكن أن نكتب التسارع الأخير من تعريف حدوده الثلاثة على الشكل التالي :

$$\vec{a}_{N,I} = (D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} \quad (29)$$

حيث :

$$(D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} = \text{التسارع الخطي للنقطة الثابتة في الجملة اللاعطالية} \quad (30)$$

وانتي تنطبق في اللحظة t على النقطة المتحركة .

( التسارع الخطي لموضع المتحرك ) .

(31)  $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$  التسارع الجاذب للنقطة الثابتة في الجملة العطالية والتي تنطبق في اللحظة  $t$  على النقطة المتحركة .  
( التسارع الجاذب لموضع المتحرك ) .

(32)  $2 \vec{\omega} \wedge D_N \vec{r}$  التسارع المتمم ( كوريوليس ) للنقطة الثابتة من الجملة العطالية والتي تنطبق في اللحظة  $t$  على النقطة المتحركة .

( تسارع كوريوليس لموضع المتحرك ) .

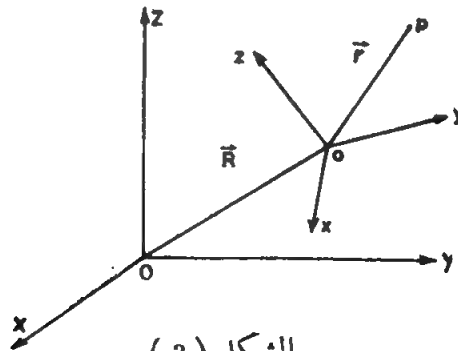
ويمكن إدراك هذه التسارعات لدى اعتبار حركة موضع المتحرك بالنسبة للجملة العطالية نفسها . وجميعها ناتجة عن دوران الجملة اللاعطالية ، الأمر الوحيد المسبب لنشوء هذه التسارعات . ولهذا يمكن أن نكتب علاقة التسارع ( 29 ) كما يلي :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_N + \vec{a}_{N,1} \quad (33)$$

حيث  $\vec{a}_{N,1}$  بشكل مجموع التسارعات الواردة في ( 30 ) ، ( 31 ) ، ( 32 ) .

#### VII - الجمل المتحركة بصورة عامة :

افترضنا فيما سبق أن الجملة اللاعطالية تقسم بحركة دورانية فقط بالنسبة للجملة الثابتة ( العطالية ) وأن مركز الأولى ينطبق دوماً على مركز الثانية .



الشكل ( 3 )

أما في الحالة العامة فإن مركز الجملة المتحركة لا ينطبق على مركز الجملة الثابتة بل يتحرك حركة ما . ولذا كان لزاماً علينا اعتبار حركته في الحالة العامة . يبين الشكل ( 3 ) جلتين عطالية OXYZ ولا عطالية oxyz . ويتمين موضع المركز المتحرك o في الجملة العطالية بشمار موضع  $\vec{R} = \vec{Oo}$  وبالتالي فحركة المركز المتحرك بالنسبة للجملة العطالية تتمين بسرته  $\vec{D}_1\vec{R}$  وتسارعه  $\vec{D}_1^2\vec{R}$

أما موضع المتحرك P فيتمين بالشمار :

$$\vec{OP} = \vec{R} + \vec{r} \quad (34)$$

وبذلك تكون سرعة P وتسارعها في الجملة العطالية بالترتيب :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{D}_1\vec{OP} = \vec{D}_1\vec{R} + \vec{D}_1\vec{r} \\ &= \vec{D}_1\vec{R} + \vec{D}_N\vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{D}_1^2\vec{OP} = \vec{D}_1^2\vec{R} + \vec{D}_1^2\vec{r} \\ &= \vec{D}_1^2\vec{R} + \vec{D}_N^2\vec{r} + (\vec{D}_N\vec{\omega}) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{D}_N\vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \end{aligned} \quad (36)$$

ونلاحظ ببساطة أن الفرق بين السرعتين الميتين بالملاقين ( 26 ) و ( 35 ) هو سرعة المركز المتحرك التي تظهر في الملاقة الأخيرة . وكذلك فإن الفرق بين التسارعين الميتين بالملاقين ( 28 ) و ( 36 ) هو تسارع المركز المتحرك الذي يظهر في الملاقة الأخيرة . وأخيراً يمكن كتابة السرعه والتسارع في الجملة العطالية بالشكل :

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_N + \vec{V}_{N,1} \quad (37)$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_N + \vec{a}_{N,1} \quad (38)$$

$$\vec{V}_{N,1} = \vec{D}_1\vec{R} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \text{حيث :}$$

$$\vec{a}_{N,1} = D_1^2 \vec{R} + (D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (39)$$

في حين ان السرعة والتسارع الظاهرين ( اي في الجملة الاعطالية ) لا يزالان يعطيان بـ  $D_N \vec{r}$  و  $D_N^2 \vec{r}$  بالترتيب .

### VIII - حركة نقطة مادية حول الارض :

ان قوانين نيوتن التي هي أساس دراسة الميكانيك الكلاسيكي صحيحة في الجمل المطالية فقط كما اوردنا في حينه ، ولا يمكن تطبيقها في دراسة الحركات في نجم لاعطالية إلا عن طريق ربط هذه الجمل الاعطالية بجمل عطالية . هذا الربط تؤمنه علاقة مثل العلاقة ( 36 ) التي تربط التسارع في جملة لاعطالية بالتسارع في الجملة المطالية . وعلى ذلك تكون معادلة الحركة لنقطة مادية تتحرك في جملة محاور لاعطالية كما يلي :

$$\vec{F} = m \vec{a}_1$$

$$= [D_1^2 \vec{R} + D_N^2 \vec{r} + (D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] m \quad (40)$$

حيث  $\vec{F}$  هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجزيء المتحرك كما يراها أو يقيسها مراقب موجود في الجملة المطالية . وإذا أردنا أن نزل التسارع في الجملة الاعطالية اخذت العلاقة الاخيرة الشكل :

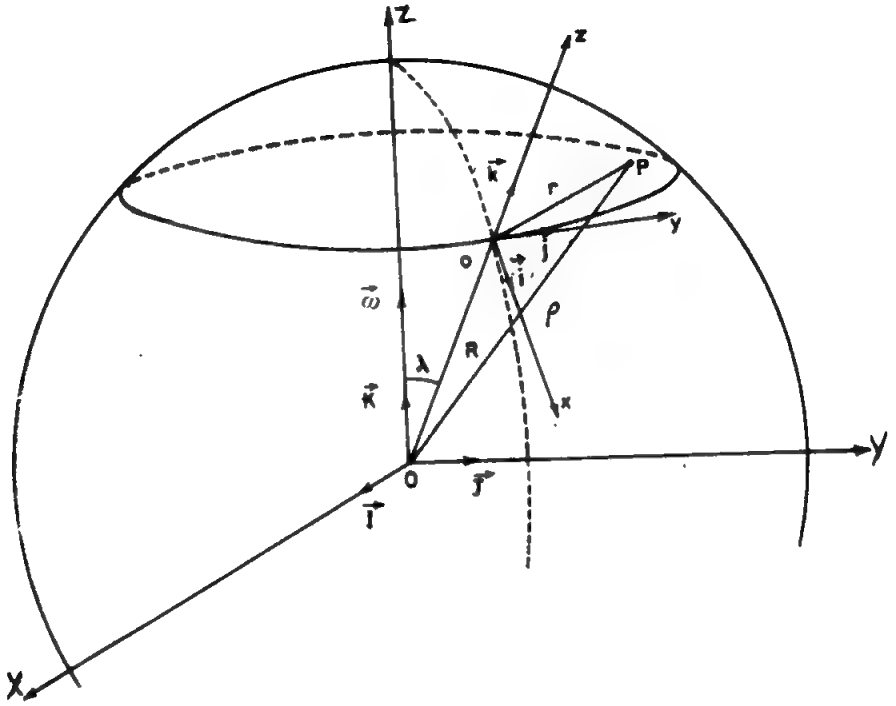
$$m D_N^2 \vec{r} = \vec{F} - m D_1^2 \vec{R} - m (D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} - 2m \vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (41)$$

إذا فرضنا أن الشمس تتحرك حركة مستقيمة منتظمة في الفراغ واعتبرنا جملة محاور مركزها الشمس وبحيث يبقى كل من محاورها موازياً لنفسه أثناء حركة الشمس فان هذه الجملة تشكل عندئذ جملة عطالية . ولما كانت حركة الارض مؤلفة من حركتين الاولى حول نفسها ودورها يوم

واحد والثانية حول الشمس ودورها 364 يوماً تقريباً فإن دوران الأرض حول الشمس يطيء جداً بالنسبة لدورانها حول نفسها . وبالتالي يمكننا أن نهمل تأثير دوران الأرض حول الشمس . وبالإضافة إلى ذلك، ولما كان مسار الأرض حول الشمس قطعاً ناقصاً كبيراً ، فإن القوس الذي تقطعه الأرض في زمن قصير نسبياً « عدة أيام » يمكن اعتباره مستقيماً بشيء من التقريب . كما يمكن أن نعتبر سرعة الأرض على مسارها ثابتة خلال تلك الفترة الزمنية القصيرة . وزى لذلك أنه بإمكاننا اعتبار حركة الأرض حول الشمس خلال تلك الفترة كحركة مستقيمة منتظمة بالإضافة إلى حركتها الدائرية حول نفسها . نستنتج مما تقدم أنه إذا اعتبرنا جملة المحاور OXYZ التي مركزها مركز الأرض ومحاورها توازي دائماً محاور الثلاثة آتفة الذكر والتي مركزها مركز الشمس ، فإن من الممكن اعتبار هذه الجملة OXYZ جملة عطالية بتقريب جيد . انظر الشكل ( 4 ) .

والآن لنفرض أننا نريد دراسة حركة متحرك P بالنسبة لراصد ثابت على الأرض في النقطة o المتمينة بتقاطع خطي طول وعرض معينين . ولنختار الثلاثة المتأسكة مع الأرض والتي مركزها موضع الراصد o . ومحاورها هي بالترتيب مماس خط العرض ومماس خط الطول والشاقول في ذلك المكان . هذه الجملة هي جملة لاعطالية لتأسكها مع الأرض الدوارة ، فحركة P بالنسبة لهذه الجملة هي حركة في جملة لاعطالية . ولدراسة هذه الحركة نربط بين التسارعين في الجملتين العطالية OXYZ واللاعطالية oxyz كما فعلنا في الفقرة السابقة وتكون عندئذ الحركة معطاة بالمعادلة ( 41 ) . قارن الشكلين ( 3 ) و ( 4 ) .

إذا تأملنا الآن في حركة الأرض حول نفسها ، أي حول المحور OZ ، وجدنا أن دورانها منتظم مما يجعل سرعتها الزاوية ثابتة . أو بتعبير آخر زى أن شمع الدوران  $\vec{\omega}$  ثابت وبالتالي :



الشكل ( 4 )

$$D_N \vec{\omega} = 0 \quad (42)$$

وزى كذلك أن :

$$D_1^2 \vec{R} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \quad (43)$$

كما أنه يمكننا أن نكتب القوة  $\vec{F}$  على الشكل :

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{\rho^3} \vec{\rho} + \vec{F}_0 \quad (44)$$

حيث  $m$  و  $M$  هما كتلتا المتحرك والأرض بالترتيب و  $\vec{\rho}$  شعاع موضع المتحرك بالنسبة لـ  $OXYZ$  و  $G$  ثابت التجاذب العالمي و  $\vec{F}_0$  أية قوى أخرى غير قوة التجاذب . وعندئذ تأخذ معادلة الحركة (41) الشكل الجديد

$$\vec{D}_N^2 \vec{r} = - \frac{G M}{\rho^3} \vec{\rho} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) - 2\vec{\omega} \wedge \vec{D}_N \vec{r} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \vec{F}_0 / m \quad (46)$$

$$= - \frac{G M}{\rho^3} \vec{\rho} - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{R} + \vec{r})] - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{D}_N \vec{r} + \vec{F}_0 / m \quad (47)$$

نسمي الشعاع :

$$\vec{g} = - \frac{G M}{\rho^3} \vec{\rho} - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{R} + \vec{r})] \quad (48)$$

بشعاع تسارع الجاذبية . ونكتب العلاقة (47) على الشكل التالي :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2 \left( \vec{\omega} \wedge \frac{d \vec{r}}{dt} \right) + \vec{F}_0 / m \quad (49)$$

حيث جميع الاشتقاقات تؤخذ في الجملة الاعطالية  $oxyz$  .

ان العلاقة (49) هي المعادلة العامة للحركة التي تأخذ جميع القوى

المؤثرة على المتحرك بين الاعتبار . هذا وان التسارع الجاذبي  $\vec{g}$  يتغير تغيراً طفيفاً بقيمته المطلقة من مكان إلى آخر على سطح الأرض . ولذلك سنعتبر طويلته ثابتة .

وسنشتق فيما يلي المعادلات التحليلية للحركة .

إذا كانت  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  أشعة الواحدة على محاور  $OXYZ$  ،

$\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  أشعة الواحدة على محاور الثلاثية  $oxyz$  فان من السهل أن نرى أن :

$$\begin{aligned} \vec{K} &= (\vec{K} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{K} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{K} \cdot \vec{k}) \vec{k} \\ &= -\sin \lambda \vec{i} + \cos \lambda \vec{k} \end{aligned} \quad (50)$$

حيث  $\lambda$  هي الزاوية المحصورة بين محور الأرض  $OZ$  والشعاع  $\vec{Oo}$  المحدد لمركز الجملة الاعطالية . ونكتب :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{K} = -\omega \sin \lambda \vec{i} + \omega \cos \lambda \vec{k} \quad (51)$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k} \quad (52)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = x'' \vec{i} + y'' \vec{j} + z'' \vec{k} \quad (53)$$

وبالتعويض من العلاقات الثلاث الأخيرة في المعادلة (49) ثم بالاسقاط على المحاور اللاعطالية  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  نجد العلاقات التحليلية للحركة أي :

$$x'' = (2\omega \cos \lambda) y' + F_x / m \quad (54)$$

$$y'' = - (2\omega \cos \lambda) x' - (2\omega \sin \lambda) z' + F_y / m \quad (55)$$

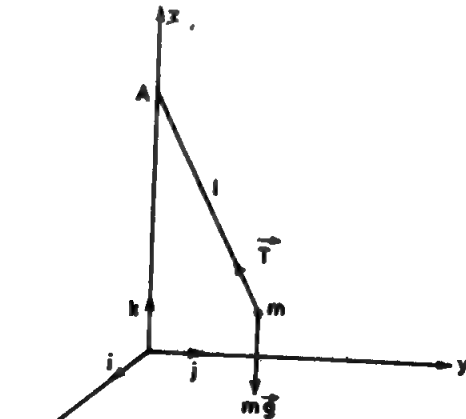
$$z'' = -g + (2\omega \sin \lambda) y' + F_z / m \quad (56)$$

حيث  $F_x$  و  $F_y$  و  $F_z$  هي مركبات القوة  $F_0$  على المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  على الترتيب . تلك هي المعادلات التحليلية لحركة متحرك بالنسبة للجملة اللاعطالية  $oxyz$  المتماصة مع الأرض والتي مركزها الراصد  $O$  على خط عرض  $\theta$  يعطى بـ  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$  . وحل هذه المعادلات يتطابق بشروط البدء

ويؤدي الى معرفة الحركة معرفة تامة . وفيما يلي تطبيق مهم .

#### 1X- نواس فوكو :

سنطبق مصادلات الحركة التحليلية (54) - (56) على دراسة نواس



الشكل ( 5 )

فوكو ( Foucault ) وهو نواس بسيط مؤلف من كتلة  $m$  معلقة بحيط دقيق مهمل الكتلة طوله  $l$ ، كما ميين بالشكل (5)، ويهتز حول وضع توازنه الشاقولي بسعات صغيرة . لقد لاحظ فوكو عام 1851 ان مستوى نوسان نواسه يتغير مع الزمن وبرهن من خلال دراسة حركة نواسه على دوران الأرض حول نفسها .

لتكن  $o$  نقطة على سطح الأرض ولتكن  $\lambda$  الزاوية المتممة لزاوية العرض لموضع  $o$  ولتكن كذلك النقطة  $A$  الثابتة نقطة تعليق النواس الذي طوله  $l$  . لنختار الثلاثية اللاعطالية  $oxyz$  بحيث تكون  $A$  على الشاقولي  $oz$  وعلى  $OA = l$  . ولنفرض أن النواس ينوس في لحظة ما  $t$  في مستو شاقولي مار من  $oz$  . ان القوة التي تخضع لها كتلة النواس  $m$  مؤلفة من مركبتين الاولى ثقلها  $mg$  المتجهة نحو الأسفل والثانية قوة الشد  $\vec{T}$  المحمولة على خيط النواس المتجهة من  $m$  الى  $A$  . يمكن كتابة هذه القوة الأخيرة بالشكل :

$$\begin{aligned}\vec{T} &= (\vec{T} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{T} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{T} \cdot \vec{k}) \vec{k} \\ &= (T \cos \alpha) \vec{i} + (T \cos \beta) \vec{j} + (T \cos \gamma) \vec{k} \\ &= -T \frac{x}{l} \vec{i} - T \frac{y}{l} \vec{j} - T \frac{z-l}{l} \vec{k}\end{aligned}\quad (57)$$

حيث  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  هي أشعة واحدة المحاور  $ox, oy, oz$  وحيث  $\alpha, \beta, \gamma$  هي الزوايا التي يصنعها النواس  $Am$  مع هذه المحاور الثلاثة وذلك على الترتيب .

من السهل جداً أن نرى ان معادلات الحركة العامة (54) - (56) تأخذ من أجل هذا النواس الشكل التالي

$$x'' = (2\omega \cos \lambda) y' - \frac{T}{m} \frac{x}{l} \quad (58)$$

$$y'' = - (2\omega \cos \lambda) x' - (2\omega \sin \lambda) z' - \frac{T}{m} \frac{y}{l} \quad (59)$$

$$z'' = (2\omega \sin \lambda) y' - g - \frac{T}{m} \frac{z-l}{l} \quad (60)$$

ولما كانت سعة النواس صغيرة وطول النواس كبيراً فإن من الممكن أن نعتبر الكتلة  $m$  تهتز في المستوى الاقوي  $xoy$  المقابل  $z=0$  ويكون عندئذ  $z'=0$  و  $z''=0$  تقريباً . ولدى التمييز في المعادلات الاخيرة فاننا نحصل على العلاقات التالية :

$$T = my - 2m y' \sin \lambda \quad (61)$$

$$x'' = - \frac{gx}{l} + \frac{2\omega xy' \sin \lambda}{l} + 2\omega y' \cos \lambda \quad (62)$$

$$y'' = - \frac{gy}{l} + \frac{2\omega yy' \sin \lambda}{l} - 2\omega x' \cos \lambda \quad (63)$$

وترى بوضوح أن هذه المعادلات غير خطية لاحتواء الطرفين الايمنين من المعادلتين الاخيرتين على  $xy'$  و  $yy'$  . إلا أن هذين الحدين صغيران بمقارنتها مع  $y'$  و  $x'$  ولذلك يمكن اهمالهما بتقريب جيد . وتصبح معادلتنا الحركة على النحو التالي :

$$x'' = -g \frac{x}{l} + 2\omega y' \cos \lambda \quad (64)$$

$$y'' = -g \frac{y}{l} - 2\omega x' \cos \lambda \quad (65)$$

نعرف الآن المقدار المقدي  $u$  والثابتين  $a$  و  $b$  كما يلي :

$$u = x + iy \quad (66)$$

$$a = \omega \cos \lambda \quad (67)$$

$$b = \sqrt{g/l} \quad (68)$$

ونجمع الملتين (64) و (65) بعد ضرب طرفي الأخيرة بـ  $i$  فنجد :

$$u = -b^2 u - 2ia u \quad (69)$$

حل هذه المعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة يعطى بسهولة

$$u = (C_1 + iC_2) \exp[-i(a-b)t] + (D_1 + iD_2) \exp[-i(a+b)t] \quad (70)$$

حيث  $\exp(i\theta) = e^{i\theta}$

وإذا فرضنا أنه في لحظة البدء  $t=0$  كان  $x=0$  و  $x'=0$  ثم  $y=0$  و  $y'=0$  وطبقنا شروط البدء هذه آخذين بين الاعتبار أن  $a$  صغيرة جداً بالنسبة لـ  $b$  وجدنا :

$$D_1 = -C_1$$

$$D_2 = C_2 \left( \frac{b-a}{b+a} \right) \simeq C_2$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C$$

ويصبح الحل الذي تمثله المعادلة (70) بالشكل :

$$u = \frac{1}{2} C [\sin(a-b)t + \sin(a+b)t] + \frac{1}{2} C [\cos(a-b)t + \cos(a+b)t] i \quad (71)$$

وبفصل المقادير الحقيقية عن التخيلية نجد :

$$x = \frac{1}{2} C \sin(a-b)t + \frac{1}{2} C \sin(a+b)t \quad (72)$$

$$y = \frac{1}{2} C \cos(a-b)t + \frac{1}{2} C \cos(a+b)t \quad (73)$$

$$x = C \cos bt \sin at \quad (74)$$

$$y = C \cos at \quad (75)$$

وأخيراً بالتعويض عن  $a$  و  $b$  بما يساويان نحصل على الشكل النهائي للملتين السابقين :

$$x = C \cos(\sqrt{g/l} t) \sin(\omega t \cos \lambda) \quad (76)$$

$$y = C \cos(\sqrt{g/l} t) \cos(\omega t \cos \lambda) \quad (77)$$

والآن إذا كتبنا :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = C \cos (\sqrt{g/L} t) \vec{n} \quad (78)$$

$$\vec{n} = \vec{i} \sin (\omega t \cos \lambda) + \vec{j} \cos (\omega t \cos \lambda) \quad (79)$$

أمكننا أن نرى أن شعاع الموضع لمسقط كتلة النواس على المستوى الأفقي محمول على الشعاع الدوار  $\vec{n}$ . وبالتالي فإن مستوي النوسان المتعين بالشعاعين  $\vec{n}$  و  $\vec{k}$  ليس ثابتاً بل يدور حول  $\vec{k}$  ودوره يساوي دور الشعاع  $\vec{n}$ . فمن الواضح إذاً من العلاقات (78) و (79) أن النواس ينوس بدور :

$$\begin{aligned} T_p &= 2 \pi (\sqrt{g/L})^{-1} \\ &= 2 \pi \sqrt{L/g} \end{aligned} \quad (80)$$

في المستوى  $(\vec{k}, \vec{n})$  الذي يدور حول  $\vec{k}$  بدور قدره :

$$T = 2\pi / \omega |\cos \lambda| \quad (81)$$

كما نلاحظ أن دور النواس،  $T_p$ ، صغير جداً بالنسبة لدور مستويه،  $T_n$ . ويتضح ذلك من المثال التالي : إذا فرضنا أن طول النواس خمسة أمتار أي 500 cm وأن زاوية عرض المكان الذي يوجد فيه النواس  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \lambda = 60^\circ$  وادركنا أن السرعة الزاوية للدوران الأرض هي

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ day}} = \frac{2 \times 3.14 \text{ rad}}{86400 \text{ sec}} \cong 7.3 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

وجدنا عندئذ أن :

$$T_p = 2 \times 3.14 \sqrt{500/980} \cong 4.5 \text{ sec}$$

وإن :

$$T_n = 2 \times 3.14 / (7.3 \times 10^{-5}) \cong 1.7 \times 10^5 \text{ sec}$$

بالإضافة إلى ما تقدم فافنا نرى أن مستوى النوسان  $(\vec{k}, \vec{n})$  يتعلق بالزاوية  $\lambda$  . فإذا كنا في نصف الكرة الشمالي كانت  $\lambda$  حادة و  $\cos \lambda > 0$  ويكون اتجاه دوران مستوى النوسان هو باتجاه عقارب الساعة . أما إذا كنا في نصف الكرة الجنوبي كانت  $\lambda$  منفرجة وكان  $\cos \lambda < 0$  ويكون عندئذ اتجاه دوران مستوى النوسان بعكس اتجاه عقارب الساعة . وفي الحالة الخاصة عندما يوضع النوسان عند خط الاستواء تكون  $\lambda = \pi/2$  ،  $\cos \lambda = 0$  ويصبح الدور  $T_n$  لانهاياً أي أن النوسان ينوس في هذه الحالة في مستوى ثابت . ويوضح المآل التالي الحالات المختلفة السابقة .

ليكن النوسان في لحظة البدء  $t_0 = 0$  في المستوي  $(\vec{k}, \vec{j})$  وليكن في تلك اللحظة  $\vec{n} = \vec{j}$  . ولننظر الآن إلى وضع الشعاع  $\vec{n}$  بعد فترة زمنية تساوي ثمن دوره أي :

$$t = T_n / 8 = \frac{\pi}{4\omega |\cos \lambda|}$$

فنرى أن

$$\vec{n} = \vec{i} \sin \left[ \omega \frac{T_n}{8} \cos \lambda \right] + \vec{j} \cos \left[ \omega \frac{T_n}{8} \cos \lambda \right] .$$

$$\vec{n} = \vec{i} \sin \left[ \omega \frac{\pi}{4\omega |\sin \lambda|} \cos \lambda \right] + \vec{j} \cos \left[ \omega \frac{\pi}{4\omega |\cos \lambda|} \cos \lambda \right]$$

$$= \vec{i} \sin \left[ \frac{n}{4} \frac{\cos \lambda}{|\cos \lambda|} \right] + \vec{j} \cos \left[ \frac{n}{4} \frac{\cos \lambda}{|\cos \lambda|} \right]$$

ففي نصف الكرة الشمالي  $\cos \lambda > 0$  و  $|\cos \lambda| = \cos \lambda$  وعندئذ :

$$\vec{n} = \vec{i} \sin \frac{\pi}{4} + \vec{j} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

أي أن  $\vec{n}$  وبالتالي مستوى النوسان  $(\vec{k}, \vec{n})$  قد دار باتجاه عقارب الساعة .

وأما في نصف الكرة الجنوبي فإن  $\cos \lambda < 0$  و  $|\sin \lambda| = -\cos \lambda$  وعندها :

$$\vec{n} = \vec{i} \sin \frac{-\pi}{4} + \vec{j} \cos \frac{-\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

بمعنى أن  $\vec{n}$  وبالتالي مستوى النوسان  $(\vec{k}, \vec{n})$  قد دار بعكس اتجاه عقارب الساعة .

محمّد يوسف الدويهي

\* \* \*

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)





# الفصل السابع

## حركة المجموعات المادية

- المجموعات المستمرة والمتقطعة
- الكثافة
- درجات الحرية
- مركز الكتلة
- اندفاع مجموعة جزيئات مادية
- حركة مركز الكتلة
- مبدأ الاندفاع الزاوي
- الطاقة الحركية والعمل
- الطاقة الكامنة ومبدأ انحفاظ الطاقة
- حركة المجموعة حول مركز كتلتها
- الدفع
- قيود الحركة
- العمل الافتراضي وتوازن المجموعات
- مبدأ دالمبير

محسن يوسف اللواتي



## I — المجموعات المستمرة والنقطعة :

كنا حتى الآن نبحث بشكل أساسي حركة جسم صغير نعتبره كجزيء مادي يمثل كتلة متجمعة في نقطة واحدة . إلا أن الحالة الحقيقية والعملية للأجسام هي أنها تتألف من أعداد كبيرة أو صغيرة من الجزيئات المادية . ونقول عن جسم أنه مؤلف من مجموعة جزيئات مادية مستمرة او منقطعة تبعاً لكون الجزيئات متصلة او منفصلة بمسافات معينة عن بعضها . وفي كثير من الحالات العملية يمكن اعتبار مجموعة مستمرة كمجموعة منقطعة وذلك بتقسيمها إلى عدد محدود قد يكون كبيراً ، من الأجزاء . وكذلك يمكن اعتبار المجموعة المنقطعة كمجموعة مستمرة إذا كان إهمال المسافات التي تفصل جزيئاتها لا يؤدي إلى خطأ كبير في دراستها . فالجسم المؤلف من ذرات « كما نعلم » يمكن اعتباره مؤلفاً من جزيئات منفصلة او متصلة حسب الهدف من دراستها .

## II — الكثافة :

يمكن ان نعرف ثلاثة انواع من الكثافة . فاذا كانت مادة الجسم موزعة توزيعاً حجبياً نعرف الكثافة الحجبية بأنها نسبة الكتلة  $\Delta M$  التي تشغل حجماً  $\Delta v$  الى ذلك الحجم عندما يصبح الحجم صغيراً جداً .

$$\sigma_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta v) = dM / dv \quad (1)$$

وفي حالة التوزيع السطحي نعرف الكثافة السطحية بشكل مشابه :

$$\sigma_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta s) = dM / ds \quad (2)$$

وأخيراً ففي التوزيع الخطي للمادة نعرف الكثافة الخطية بالعلاقة :

$$\sigma_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta l) = dM / dl \quad (3)$$

حيث  $\Delta s$  و  $\Delta l$  عنصرا السطح والطول في التوزيعين السطحي والخطي بالترتيب .

وبصورة عامة لا يشترط في توزيع المادة أن يكون منتظماً . ولذلك فإن الأنواع الثلاثة من الكثافة تابعة للموضع بشكل عام :

### III — درجات الحرية :

ان عدد المقادير المستقلة اللازمة معرفتها لتعيين وضع المجموعة في أية لحظة من الزمن يسمى بعدد درجات الحرية للمجموعة . فالجزيء الواحد يتعين موضعه بثلاثة مقادير هي إحداثياته . ولذا فدرجات حريته ثلاث . والجملة المولفة من  $N$  جزيء مادي تتعين بإحداثيات جزيئاتها وهي  $3N$  فدرجات حريتها هي  $3N$  . ودرجات حرية الجسم الصلب المتحرك في الفراغ هي 6 درجات وهكذا ... إلا أن درجات الحرية تنخفض إذا ما حققت المجموعة بعض الشروط التي تجعل بعض الاحداثيات مرتبطة بالأخرى بملاقات معينة . وكل علاقة تجعل إحدى الاحداثيات تابعة للاحداثيات الأخرى وبالتالي تجعلها غير مستقلة وبذلك ينقص عدد الاحداثيات المستقلة بعدد العلاقات بين الاحداثيات وبالتالي ينخفض عدد درجات الحرية بنفس العدد . وعلى سبيل المثال فإن درجات حرية جملة مؤلفة من ثلاث نقاط مختلفة هي تسع ، أي بعدد الاحداثيات التسع اللازمة لتعيين مواضع نقاط الجملة  $(x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_2, y_2, z_2)$  و  $(x_3, y_3, z_3)$  . ولكن إذا كانت هذه النقاط متمينة بحيث تبقى المسافات بينها ثابتة فإن هناك ثلاث علاقات تربط الاحداثيات المختلفة وهي :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R_{12}^2 \quad (4)$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = R_{23}^2 \quad (5)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = R_{31}^2 \quad (6)$$

ولذلك تصبح درجات الحرية ستاً بدلاً من تسع .

### VI — مركز الكتلة :

تتكون الجملة المادية المولفة من  $N$  جسيماً كتلتها  $(m_1, m_2, m_3, \dots, m_N)$

وأشعة مواضعها  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N)$ . يعرف مركز كتلة المجموعة

C بأنه النقطة التي يحقق شعاع مواضعها  $\vec{r}_c$  العلاقة

$$\vec{r}_c = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n / M. \quad (7)$$

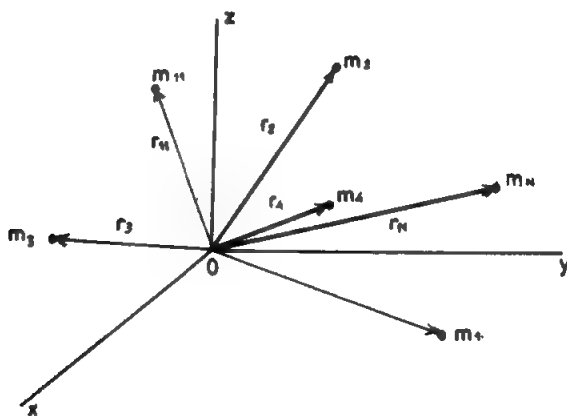
كما في الشكل (1)، حيث

$$M = \sum_{n=1}^N m_n \quad (8)$$

هي كتلة المجموعة بكاملها .

ولما كان ثقل الجسم هو جداء كتلته بتسارع الثقالة فان مركز الثقل

يعطى بالعلاقة (7) ذاتها .



الشكل ( 1 )

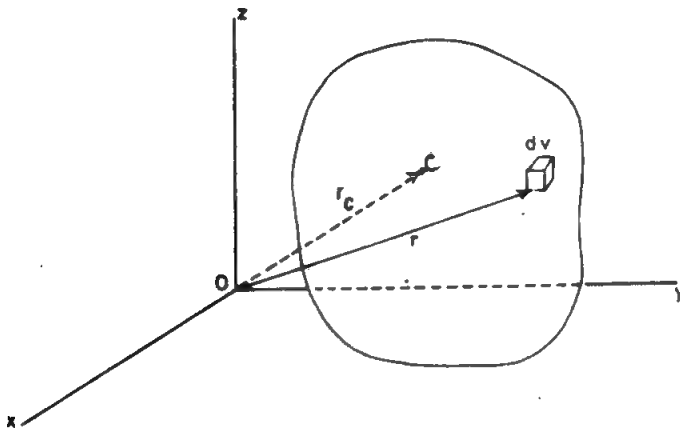
أما إذا كانت الجملة المادية جسماً مستمراً R فان العلاقة التي تبين مركز

الكتلة أو مركز الثقل تأخذ شكلاً تكاملياً أي :

$$\vec{r}_c = \int_R \sigma(r) \vec{r} dv / M \quad (9)$$

$$M = \int_R \sigma(r) dv \quad (10)$$

حيث  $\sigma$  كثافة الجسم وهي بصورة عامة تابعة للموضع  $\vec{r}$ .  
إذا كتبنا أشعة الموضع بدلالة الاحداثيات الديكارتية واسقطنا الملاقين



الشكل ( 2 )

( 7 ) و ( 9 ) على المحاور حصلنا على العلاقات :

$$x_c = \sum_n m_n x_n / M \quad \text{أو} \quad x_c = \int_R \sigma x \, dv \quad (11)$$

$$y_c = \sum_n m_n y_n / M \quad \text{أو} \quad y_c = \int_R \sigma y \, dv \quad (12)$$

$$z_c = \sum_n m_n z_n / M \quad \text{أو} \quad z_c = \int_R \sigma z \, dv \quad (13)$$

$$M = \sum_n m_n \quad \text{أو} \quad M = \int_R \sigma \, dv \quad (14)$$

حيث التكامل حجمي أو سطحي أو خطي حسب طبيعة الجملة .  
وتبعاً لذلك يكون المنصر  $dv$  والكثافة  $\sigma$  حجميين أو سطحيين أو خطيين .  
كما ان الإشارة  $\sum$  تأخذ بين الاعتبار جميع قيم  $n$  .

## — V — اندفاع مجموعة جزيئات مادية :

إذا كانت  $m_n$  كتل الجزيئات و  $\vec{r}_n$  أشعة مواضعها و  $\vec{v}_n$  سرعتها فإن اندفاع المجموعة يعرف بأنه مجموع اندفاعات الجزيئات المختلفة أي :

$$\vec{p} = \sum_n \vec{p}_n = \sum_n m_n \vec{v}_n = \sum_n m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt} \quad (14)$$

إلا أن اشتقاق العلاقة (7) يعطي :

$$\sum_n m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt} = M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M \vec{v}_c \quad (15)$$

ومن (14) و (15) نجد

$$\vec{p} = M \vec{v}_c \quad (16)$$

وتدل هذه العلاقة الأخيرة على أن الاندفاع الكلي بكافيه اندفاع مركز الكتلة فيها لو وضعت فيه كتلة المجموعة بكاملها . ويسمى الطرف الأيمن من العلاقة (16) باندفاع مركز الكتلة أو اندفاع مركز الثقل .

## — IV — حركة مركز الكتلة :

لتكن  $\vec{F}_i$  محصلة القوى الخارجية المؤثرة على النقطة  $i$  من الجملة ،

ولتكن  $\vec{f}_{ij}$  القوة التي تؤثر بها النقطة  $j$  على النقطة  $i$  . وهذه القوة تسمى قوة داخلية . إن مجموع القوى المؤثرة على النقطة  $i$  هو القوة الخارجية

$\vec{F}_i$  وجميع القوى الداخلية  $\sum \vec{f}_{ij}$  الناتجة عن جميع النقاط الأخرى عدى النقطة  $i$  . ويمكن أن نزيل هذا الاستثناء إذا أدركنا أن القوة التي تؤثر

بها نقطة على نفسها معدومة أي  $\vec{f}_{ii} = 0$  . إذاً وحسب قانون نيوتن الثاني فإن معادلة حركة النقطة ( أو الجزيء )  $i$  تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \quad (17)$$

وبأخذ حركة جميع الجزيئات بعين الاعتبار وجمع معادلات حركتها طرفاً إلى طرف نجد :

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j f_{ij} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_{ij}}{dt^2} \quad (18)$$

ولما كان  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  حسب مبدأ رد الفعل فإن المجموع المضاعف في الطرف الأيسر من (18) معدوم . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا رمزنا لمجموع القوى الخارجية بـ  $\vec{F}$  ولاحظنا أن اشتقاق العلاقة (7) مرتين متتاليتين يعطي

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_o}{dt^2} = M \vec{a}_o \quad (19)$$

لما كن كتابة العلاقة (18) بالشكل

$$\vec{F} = M \vec{a}_o \quad (20)$$

تدل هذه العلاقة على أن مركز الثقل C للجسم يتحرك وكأنه خاضع لمجموع القوى الخارجية المؤثرة في مختلف جزيئات المجموعة ويحمل كتلة المجموعة بأكملها .

من الواضح أن اندفاع مركز الثقل يساوي مجموع اندفاعات الجزيئات المختلفة للجسم أي أن :

$$\vec{p}_o = M \vec{v}_o = M \frac{d \vec{r}_o}{dt} = \sum_i m_i \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \sum_i \vec{p}_i \quad (21)$$

والعلاقة (20) تكتب بالشكل :

$$\vec{F} = \frac{d \vec{p}_o}{dt} \quad (22)$$

فإذا كانت القوى الخارجية معنومة فإن العلاقة الأخيرة تدل على أن اندفاع الجسم  $\vec{p}$  المساوي لاندفاع مركز الثقل  $\vec{p}_o$  ثابت دوماً . وهذا



ما يسمى بمبدأ انحفاظ الاندفاع . وتكون حركة مركز الثقل مستقيمة منتظمة .

## VII — مبدأ الاندفاع الزاوي :

يعرف الاندفاع الزاوي الكلي للجملة بأنه مجموع الاندفاعات الزاوية لجزيئاتها أي :

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) \quad (23)$$

والعزم الحاصل للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة هو :

$$\vec{\Lambda} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \quad (24)$$

باشتقاق الاندفاع الزاوي بالنسبة للزمن نجد :

$$\begin{aligned} d\vec{\Omega} / dt &= \sum_i m_i [(\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i) + (\vec{r}_i \wedge \vec{a}_i)] \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{a}_i) = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{a} \\ &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F} \end{aligned} \quad (25)$$

إن مقارنة العلاقتين (24) ، (25) تؤدي إلى العلاقة الهامة :

$$\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega} / dt \quad (26)$$

أي أن العزم الحاصل يساوي مشتق الاندفاع الزاوي بالنسبة للزمن . وهذا ما يعرف بمبدأ الاندفاع الزاوي . وهذا المبدأ على جانب كبير من الأهمية في دراسة الجمل الميكانيكية .

إذا كانت القوى الخارجية المؤثرة في الجملة معدومة فإن عزوم هذه

القوى معدومة أيضاً وبالتالي فالعزم الحاصل  $\vec{\Lambda}$  معدوم . وتدل العلاقة (26) عندئذ على أن الاندفاع الزاوي ثابت أي أنه محفوظ . يسمى ما تقدم بمبدأ انحفاظ الاندفاع الزاوي .

## VIII — الطاقة الحركية والعمل :

تتألف الطاقة الحركية لجملة ميكانيكية من مجموع الطاقات الحركية لجزيئاتها أي :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 \quad (27)$$

وعندما تتحرك الجملة بتأثير قوى خارجية  $\vec{F}_i$  على جزيئاتها فإن العمل الذي تنجزه لدى الانتقال من موضع أول إلى موضع ثان هو :

$$W_{1,2} = \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

حيث التكامل من موضع البدء إلى موضع النهاية .

وبالتعويض عن القوى  $\vec{F}_i$  بـ  $m_i \vec{a}_i$  ، حسب قانون نيوتن الثاني ، نجد :

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \sum_i \int m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i \\ &= \sum_i \int m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_i \left[ \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right]_1^2 \\ &= T_2 - T_1 \end{aligned} \quad (28)$$

أي أن العمل المنجز يساوي تزايد الطاقة الحركية للجموعة .

$$W_{1,2} = T_2 - T_1 \quad (29)$$

## IX — الطاقة الكامنة ومبدأ انحفاظ الطاقة :

عندما تكون جميع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة في مختلف نقاط المجموعة محافظة فإن كلاً منها يشتق من كون ويكون لكل من نقاط المجموعة الميكانيكية طاقة كامنة قدرها :

$$V_i = - \int ( \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} ) d\vec{r}_i \quad (30)$$

وحيث يعتبر مبدأ الكمون اختيارياً كما نعلم . وتكون الطاقة الكامنة الكلية للجملة :

$$V = \sum_i V_i = - \int \left[ \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \right] \cdot d\vec{r}_i$$

$$= - \int \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i - \int \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \quad (31)$$

$$= V_{\text{ext}} + V_{\text{int}} \quad (32)$$

حيث  $V_{\text{ext}}$  الكمون الناتج عن القوى الخارجية والمعطى بالتكامل الاول من (31) و  $V_{\text{int}}$  الكمون الناتج عن القوى الداخلية والمعطى بالتكامل الثاني من نفس العلاقة . اما الاول فيمكن حسابه عند معرفة القوى  $\vec{F}_i$  واما الثاني فيمكن كتابته بشكل جديد زراه فيما يلي .

إذا كان  $U_{ij}$  كمون القوة  $\vec{f}_{ij}$  التي تؤثر بها النقطة  $j$  على النقطة  $i$  وإذا كان  $U_{ji}$  كمون القوة  $\vec{f}_{ji}$  التي تؤثر بها النقطة  $i$  على النقطة  $j$  ، فان هذين الكمونين متساويان اي :

$$U_{ij}(\vec{r}_{ij}) = U_{ji}(\vec{r}_{ji}) \quad (33)$$

وبالتالي نكتب :

$$\vec{f}_{ij} = - \left( \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} \right) \vec{j} - \left( \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} \right) \vec{k}$$

$$\vec{f}_{ji} = - \left( \frac{\partial U_{ji}}{\partial x_j} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial U_{ji}}{\partial y_j} \right) \vec{j} - \left( \frac{\partial U_{ji}}{\partial z_j} \right) \vec{k}$$

ومن ذلك نكتب :

$$- \left( \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \right) = \left[ \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} dz_i \right. \\ \left. + \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_j} dz_j \right]$$

$$= d U_{ij} \quad (\text{تفاضل كلي}) \quad (34)$$

ويمكن أن نرى بسهولة أن :

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \sum_j \sum_i \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \quad (35)$$

من العلاقتين (34) و (35) نستنتج أن :

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j dU_{ij}$$

وعندئذ يأخذ الكون الداخلي الشكل التالي :

$$\begin{aligned} V_{int} &= - \int \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \int \sum_i \sum_j dU_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_{ij} \end{aligned} \quad (36)$$

وزى بسهولة أن العمل المنجز من قبل القوى الخارجية والداخلية لدى الانتقال من وضع إلى وضع آخر يساوي فرق الكون للقوى الداخلية والخارجية أي :

$$W_{1,2} = V_1 - V_2 = (V_{ext})_1 + (V_{int})_1 - (V_{ext})_2 - (V_{int})_2$$

ومن جهة أخرى :

$$W_{1,2} = T_2 - T_1$$

ومنها نجد أن الطاقة الكلية و مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة ، ثابتة أو محفوظة أي :

$$E = V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \quad (37)$$

وهذا ما يعرف بمبدأ انخفاض الطاقة الكلية . وهو أيضاً على جانب كبير من الأهمية في دراسة حركة جملة جزئيات مادية .

### X - حركة المجموعة حول مركز كتلتها :

من المفيد في كثير من الأحيان أن ندرس حركة جملة ميكانيكية حول مركز كتلتها . لذا فإن النظريات التالية ذات أهمية كبيرة .

١ - نظرية : إن الاندفاع الخطي للجملة حول مركز كتلتها

معلوم . يتج البرهان مباشرة إذا اعتبرنا مركز الكتلة مبدأً للاحداثيات ، حيث تصبح العلاقة (7) بالشكل :

$$\sum_i m_i \vec{e}_i = 0$$

حيث  $\vec{e}_i$  شعاع موضع النقطة  $i$  بالنسبة لمركز الكتلة . وبلاشتقاق نحصل على المطلوب .

كما أنه يمكن البرهان على النظرية بكتابة علاقة مركز الكتلة (7) على الشكل :

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_c + \vec{e}_i) = \vec{r}_c + \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{e}_i$$

ومنها :

$$\sum_i m_i \vec{e}_i = 0$$

وبلاشتقاق نحصل على المطلوب .

ب - نظرية : الاندفاع الزاوي الكلي حول أية نقطة يساوي الاندفاع الزاوي لمركز الكتلة ، وكأنه يحمل كتلة الجلة بكاملها ، مضافاً إليه الاندفاع الزاوي للجلة حول مركز الكتلة .

لبرهان نكتب الاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  كما يلي :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_c + \vec{e}_i) \wedge (\vec{r}'_c + \vec{e}'_i) \\ &= \sum_i \vec{r}_c \wedge m_i \vec{r}'_c + \vec{r}_c \wedge \sum_i m_i \vec{e}'_i - \vec{r}'_c \wedge \sum_i m_i \vec{e}_i + \sum_i \vec{e}_i \wedge m_i \vec{e}'_i \end{aligned}$$

ولكن :

$$\sum_i m_i \vec{e}'_i = 0 \quad , \quad \sum_i m_i \vec{e}_i = 0$$

إذاً :

$$\vec{\Omega} = \vec{r}_c \wedge M \vec{r}'_c + \sum_i \vec{e}_i \wedge m_i \vec{e}'_i \quad (38)$$

أو :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_c + \vec{\Omega}_0 \quad (39)$$

حيث  $\vec{\Omega}_c$  الاندفاع الزاوي لمركز الكتلة و  $\vec{\Omega}_0$  الاندفاع الزاوي للجملة حول مركز الكتلة .

ـ نظرية : الطاقة الحركية الكلية للجملة تساوي الطاقة الحركية لمركز الكتلة ، وكأنه يحمل كتلة الجملة بكاملها ، مضافاً إليها الطاقة الحركية للجملة حول مركز الكتلة .

يتبع البرهان بطريقة مشابهة تماماً لما أتبع في النظرية السابقة وتؤدي إلى العلاقة :

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 = T_c + T_0$$

و ـ نظرية : العزم الحاصل حول مركز كتلة الجملة لجميع القوى الخارجية المؤثرة فيها يساوي المشتق بالنسبة للزمن للاندفاع الزاوي حول مركز الكتلة . أي :

$$\vec{A}_0 = d\vec{\Omega}_0 / dt \quad (41)$$

لبرهان نبدأ بالعلاقة العامة (26) التي سبق أن برهنا على صحتها وهذه العلاقة تكتب بالشكل :

$$\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i' \right] = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i''$$

وبتعويض  $\vec{r}_i$  بـ  $\vec{r}_c + \vec{e}_i$  في العلاقة الأخيرة وملاحظة الحدود المدمومة نجد :

$$\sum_i \vec{r}_c \wedge \vec{F}_i + \sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_c \wedge m_i \vec{v}_c'' + \sum_i \vec{e}_i \wedge m_i \vec{v}_i'' \quad (42)$$

ولكن :

$$\sum_i \vec{r}_c \wedge \vec{F}_i = \vec{r}_c \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{r}_c \wedge \vec{F} = \vec{\Lambda}_c$$

وكذلك

$$\sum_i \vec{r}_c \wedge m_i \vec{r}_c'' = \vec{r}_c \wedge M \vec{r}_c'' = \vec{r}_c \wedge \vec{F} = d\vec{\Omega}_c / dt$$

إذاً :

$$\vec{\Lambda}_c = d\vec{\Omega}_c / dt = \vec{\Omega}_c' \quad (43)$$

وتصبح العلاقة (42) :

$$\sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{e}_i \wedge m_i \vec{e}_i'$$

أو :

$$\vec{\Lambda}_o = d\vec{\Omega}_o / dt = \vec{\Omega}_o'$$

#### XI - الدفع :

إذا كانت  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  حاصلة القوى الخارجية المؤثرة في الجملة فاننا نعرف الدفع الخطي الكلي للجملة بين اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  بالمقدار :

$$\vec{J}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (44)$$

كما نعرف الدفع الزاوي الكلي بالمقدار :

$$\vec{J}_\omega = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda} dt \quad (45)$$

حيث  $\vec{\Lambda}$  العزم الحاصل للقوى  $\vec{F}_i$  . هذا ويحقق الدفع الخطي والدفع الزاوي النظريتين التاليتين :

١ - نظرية : الدفع الخطي بين اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  يساوي تغير الاندفاع

بينها .

$$\begin{aligned}\vec{J}_i &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i d\vec{p}_i = \sum_i (\vec{p}_i)_2 - \sum_i (\vec{p}_i)_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1\end{aligned}$$

إذا :

$$\vec{J}_i = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (46)$$

حيث تفيد هذه العلاقة ما ورد في نص النظرية .

ب — نظرية : الدفع الزاوي بين اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  يساوي تغير الاندفاع الزاوي بينهما .

$$\begin{aligned}\vec{J}_a &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (d\vec{\Omega} / dt) dt = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1\end{aligned}$$

إذا :

$$\vec{J}_a = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 \quad (47)$$

ومفاد هذه العلاقة يطابق مضمون نص النظرية .

## XII — قيد الحركة :

غالباً ما يفرض على الجملة الميكانيكية أن تتحرك بشكل معين . ففي حالة الجسم الصلب يتحرك الجسم بحيث تبقى المسافة بين أية نقطتين منه ثابتة . وفي حركة نقطة واحدة ، قد تحير هذه النقطة على التحرك على سطح أو منحني . مثل هذه الحركات تسمى بالقيدة . وتحديد الحركة بشكل معين يسمى قيد الحركة



إذا أمكن التعبير عن القيد بالشكل الرياضي

$$\psi ( \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n, t ) = 0 \quad (48)$$

أي إذا أمكن إيجاد علاقة جبرية تربط أشعة مواضع نقاط الجملة والزمن فإننا نسمي القيد الذي تعبر عنه العلاقة قيداً هولونومياً ، وإلا فنسمي القيد بالقيد اللاهولونومي ، كأن تكون علاقة القيد تفاضلية مثلاً .

### XIII - المعمل الافتراضي وتوازن المجموعات :

لنعتبر وضعين مختلفين للجملة منسجمين مع القوى والقيود المطبقة عليها . للانتقال من أحد الوضعين إلى الآخر يكفي أن نعطي كل جزيء من جزيئاته انتقالاً مباشراً من الوضع الأول إلى الوضع الثاني له . نسمي هذا الانتقال بالانتقال الافتراضي ونعطيه الرمز  $\delta \vec{r}_i$  « بالنسبة للجزيء i » تمييزاً له عن الانتقال الفعلي  $d\vec{r}_i$  الذي يحصل بتأثير القوى المطبقة وضمن القيود المفروضة . وللانتقال الافتراضي جميع خواص الانتقال الفعلي . فمثلاً :

$$\delta ( \sin \theta ) = \cos \theta \delta \theta$$

نعم أن الشرط اللازم لكي تتوازن الجملة هو أن تكون القوى المطبقة عليها معدومة . ويتبع من ذلك أن ما نسميه بالمعمل الافتراضي للقوى

$\vec{F}_i$  المطبقة على الجزيئات i معدوم أي :

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

وبجمع الاعمال الافتراضية على جميع الجزيئات نجد :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (49)$$

وإذا كانت الحركة مقيدة أمكن تحليل القوة  $\vec{F}_i$  الى جزئين : القوة

الفعلية  $\vec{F}_{e_i}$  وقوة رد الفعل  $\vec{F}_{c_i}$  أي :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{e_i} + \vec{F}_{c_i} \quad (50)$$

ولما كان رد الفعل متعامداً مع المسار فإن عمله معدوم وبالتالي إذا عوضنا في (49) وجدنا :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (51)$$

وتدل هذه العلاقة على أن الجملة تتوازن إذا كان العمل الافتراضي الكلي للقوى الفعلية المطبقة عليها معدوماً . وهذا ما يعرف باسم مبدأ العمل الافتراضي .

عندما تكون القوى محافظة « مشتقة من كون  $V$  » فإن شروط التوازن هي :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \text{ و } \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \dots \quad (52)$$

حيث  $q_1, q_2, \dots$  هي الاحداثيات المختلفة للجملة . وعندئذ يكون العمل الافتراضي مساوياً

$$\delta W = - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots = - \delta V = 0 \quad (53)$$

وهذا يدل على أن العلاقات (52) تكافئ مبدأ العمل الافتراضي تماماً .

يكون التوازن مستقراً إذا كان الكمون  $V$  في نهاية صفرى . فإذا كان الكمون قابلاً لاحداثية واحدة  $q_1$  مثلاً يكفي عندئذ أن يكون

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \text{ و } \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0 \quad (54)$$

حتى يكون التوازن مستقراً .

هذا ويمكن أن يكون التوازن مستقراً بالنسبة لبعض الاحداثيات وقلقاً بالنسبة للبعض الآخر . فإذا كان مثلاً

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \text{ و } \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} > 0$$

وكان

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \text{ و } \frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} < 0$$

قلنا ان التوازن مستقر بالنسبة للاحداثية  $q_i$  وقلق بالنسبة للاحداثية  $q_j$ .

#### XIV — مبدأ دالمبير .

يمكن أن نمنح مبدأ العمل الافتراضي ليشمل الحركة بالاضافة إلى السكون . فكل نقطة  $i$  من الجلمة تتحرك وفقاً لقانون نيوتن الثاني .

$$\vec{F}_i = d\vec{p}_i / dt$$

أو :

$$\vec{F}_i - d\vec{p}_i / dt = 0 \quad (55)$$

حيث  $\vec{p}_i$  اندفاع النقطة  $i$  . وتعني هذه العلاقة الأخيرة ان النقطة  $i$  يمكن أن تعتبر متوازنة تحت تأثير مجموع القوتين  $\vec{F}_i$  و  $-d\vec{p}_i / dt$  وتدعى الأخيرة منها أحياناً بالقوة المنتجة المكوسة للنقطة  $i$  . وبإسعمال مبدأ العمل الافتراضي لجميع الجزيئات أو النقاط يمكن أن نقول :

تتحرك الجلمة المادية بشكل يكون فيه العمل الافتراضي

$$\sum_i (\vec{F}_i - d\vec{p}_i / dt) \cdot d\vec{r}_i = 0 \quad (56)$$

وهذا ما يسمى بمبدأ دالمبير . وبهذا المعنى يمكن اعتبار الحركة حالة خاصة من السكون .

\* \* \*



## الفصل الثامن

### الصواريخ — الانقسام — الاصطدام

- حركة كتلة متفجرة ومبدأ الحركات النفاثة
- انقسام جسم الى قسمين وحركة كل منهما
- الصواريخ ذات المراحل المتعددة
- قاعدة نيوتن في الاصطدام — مرونة الاصطدام
- الاصطدام الراسي لجسمين ماديين
- الاصطدام الجانبي



تعد دراسة حركة الصواريخ والكتل المتغيرة والاصطدام من أم التطبيقات على الفصل السابق ، أي مجموعات النقاط المادية . وستناول هذه الموضوعات كلا على انفراد في الفقرات التالية .

### I — حركة كتلة متغيرة — مبدأ الحركات النفاثة ( الصاروخية ) :

في جميع دراستنا السابقة كنا نعتبر أن كتلة الجلمة المتحركة ثابتة . إلا أن هذا الاعتبار ليس صحيحاً دائماً وفي جميع الحالات . ولذلك سندرس أولاً حركة الكتلة المتغيرة تغيراً مستمراً . وهذه الدراسة تنطبق على حركة الصواريخ التي تتغير كتلتها باستمرار لفقدانها الوقود الذي تنفثه بعد الاحتراق .

لتكن  $m$  الكتلة الكلية للصاروخ ( مع وقوده ) في اللحظة  $t$  . وفي لحظة لاحقة  $t + \Delta t$  لنفرض أن الكتلة أصبحت  $m + \Delta m$  وذلك بعد أن نفث الصاروخ غازاً ( نتائج محروقات ) كتلته  $-\Delta m$  ، حيث  $\Delta m$  هو مقدار سالب لأن كتلة الصاروخ تتناقص . ولتكن أيضاً  $\vec{v}$  و  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$  سرعة الصاروخ في اللحظتين  $t$  و  $t + \Delta t$  بالنسبة لجلمة عطالية ما ، فإذا كانت  $\vec{u}$  سرعة الغاز المنطلق بالنسبة للصاروخ نفسه ، فإن سرعة الغاز بالنسبة للجلمة العطالية هي  $\vec{u} + \vec{v}$  .

والآن يمكننا تطبيق النظرية القائلة أن تغير الاندفاع الخطي خلال الزمن  $\Delta t$  يساوي دفع القوى المؤثرة خلال هذا الزمن . إن الاندفاع الخطي

في اللحظة  $t$  هو :

$$\vec{p}(t) = m \vec{v} \quad (1)$$

والاندفاع في اللحظة  $t + \Delta t$  هو :

$$\vec{p}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + (-\Delta m)(\vec{v} + \vec{u}) \quad (2)$$

أما الدفع فيساوي  $\vec{F} \Delta t$  . بتطبيق النظرية المذكورة نجد :

$$(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \Delta m(\vec{v} + \vec{u}) - m\vec{v} = \vec{F} \Delta t$$

وبالاختصار :

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} - \vec{u} \frac{\Delta m}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Delta m = \vec{F} \quad (3)$$

ولما كان الصاروخ ينفث الغاز بشكل مستمر فمعن الواجب عندئذ اعتبار الحالة التفاضلية ، أي عندما  $\Delta t \rightarrow 0$  وعندئذ  $\Delta m \rightarrow 0$  ، والعلاقة الأخيرة (3) تأخذ الشكل :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dm}{dt} = \vec{F} \quad (4)$$

وهي معادلة حركة الصاروخ .

ويجب أن نلاحظ هنا أن الجملة المدروسة ليست الصاروخ وما فيه من وقود فحسب بل والغاز المنفوث أيضاً . فعندما طبقنا النظرية السابقة طبقناها على كل هذه الأجزاء كمجموعة واحدة ولكن ذات أجزاء ( جزئين ) تتحرك بسرعات مختلفة .



كما يجب أن نلاحظ أن المعادلة (4) التي تمثل حركة الصاروخ هي معادلة تفاضلية بالنسبة لكل من السرعة والكتلة ، لأن الكتلة تتغير أثناء الحركة . ولحل هذه المعادلة يجب أن نعين أولاً مشتق الكتلة  $dm/dt$  . فإذا فرضنا أن كمية الغاز المنفوث ( نتائج الاحتراق ) في واحدة الزمن ثابتة ، أي أن الغاز ينطلق بمعدل ( غزارة ) ثابت  $\alpha$  ، فإن :

$$dm / dt = - \alpha , \quad m = m_0 - \alpha t \quad (5)$$

حيث  $m_0$  كتلة الصاروخ بما فيه في لحظة البدء . وبذلك تصبح المعادلة (4) على الشكل :

$$( m_0 - \alpha t ) \frac{d \vec{v}}{dt} - \alpha \vec{u} = \vec{F} \quad (6)$$

هذه المعادلة عامة ، ولا يوجد فيها أي قيد على القوة أو سرعة الغاز المنفوث ، لا من حيث القيمة الجبرية ولا من حيث الاتجاه . فسرعة نفث الغازات من الصاروخ قد لا توازي سرعته ، أو قد لا تكون مماسة لمساره . ففي معظم الأحيان تستعمل فوهات جانبية في الصاروخ لنفث كميات مختلفة من غازات المحركات ، وذلك لتغيير اتجاه الصاروخ بأشكال مختلفة .

وخلاصة القول أن المعادلة (6) هي المعادلة العامة لحركة الصاروخ دون أية قيود على القوة أو على السرعة النسبية  $\vec{u}$  للغاز المنفوث .

وفي الحالة الخاصة عندما تكون الحركة عمودية ، والسرعة  $\vec{u}$  تماكس  $\vec{v}$  بالاتجاه ، نكتب معادلة حركة الصاروخ على الشكل :

$$( m_0 - \alpha t ) \frac{dz'}{dt} - \alpha u = - ( m_0 - \alpha t ) g$$

أو :

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{u \alpha}{m_0 - \alpha t} - g \quad (7)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو :

$$z' = u \lg \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} - gt \quad (8)$$

حيث فرضنا أن الصاروخ قد انطلق بدون سرعة بدء من ارتفاع  $z_0 = 0$  . وهذه العلاقة تعين سرعة الصاروخ في أية لحظة  $t$  . وتكمل العلاقة الأخيرة بمطينا موضع الصاروخ .

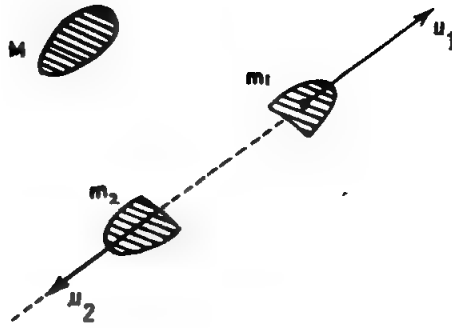
## II — انقسام جسم الى قسمين وحركة كل منهما :

لتكن  $M$  كتلة جسم ساكن ، ولنفرض أنه قد انقسم إلى قسمين ، كتلتاهما  $m_1$  و  $m_2$  ، وذلك بتأثير طاقة كانت كامنة فيه ، كطاقة كيميائية أو طاقة انفلات نابض كان مضغوطاً . . الخ . ولتكن  $E_p$  هذه الطاقة التي أدت إلى انفصال  $m_1$  عن  $m_2$  . إذا كانت القوى الخارجية المؤثرة على الجسم وجزأيه معدومة فإن نظرتي انحفاظ الاندفاع وانحفاظ الطاقة الكلية تعطيان :

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E_p \quad (10)$$

حيث  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  سرعتا الجزأين  $m_1$  ,  $m_2$  بعد انفصالهما عن بعضهما .  
تبين العلاقة الأولى من هاتين العلاقتين أن للسرعتين  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  حاملاً



الشكل ( 1 )

واحداً واتجاهين مختلفين . وحل المعادلتين مما يؤدي إلى معرفة القيمتين الجبريتين للسرعتين :

$$u_1 = \sqrt{\frac{2 E_p m_2}{m_1 (m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 E_p}{M} \cdot \frac{m_2}{m_1}} \quad (11)$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{2 E_p m_1}{m_2 (m_1 + m_2)}} = -\sqrt{\frac{2 E_p}{M} \cdot \frac{m_1}{m_2}} \quad (12)$$

لنفرض الآن أن الجسم كان يسير بسرعة  $\vec{v}$  قبل أن ينفصل جزاءه عن بعضها ، وبعد الانفصال كانت سرعتا الجزأين  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  . لتعيين هاتين السرعتين نطبق نظريتي حفظ الاندفاع وحفظ الطاقة فنجد :

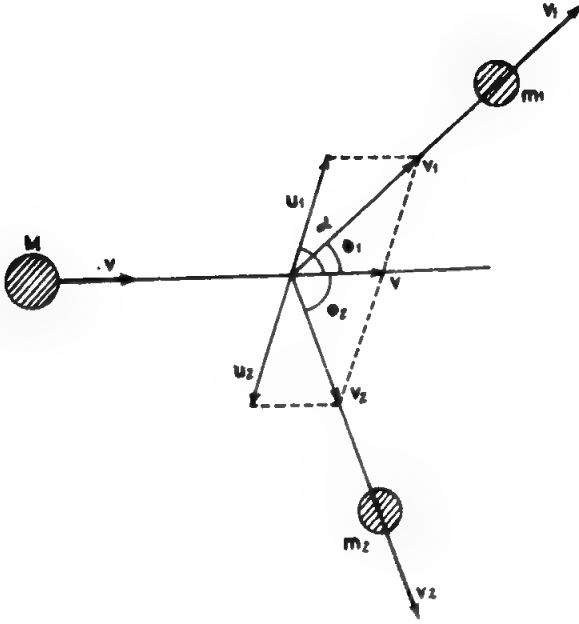
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{v}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_p + \frac{1}{2} M v^2$$

ويمكننا أن نكتب ايضاً :

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{u}_1 , \quad \vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u}_2 \quad (13)$$

حيث  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  السرعتان الناتجتان عن الانقسام .



الشكل ( 2 )

وتصبح العلاقتان السابقتان :

$$m_1 ( \vec{v} + \vec{u}_1 ) + m_2 ( \vec{v} + \vec{u}_2 ) = M \vec{v} \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} m_1 ( \vec{v} + \vec{u}_1 )^2 + \frac{1}{2} m_2 ( \vec{v} + \vec{u}_2 )^2 = E_p + \frac{1}{2} M \vec{v}^2 \quad (15)$$

وبفك الأقواس وملاحظة أن

$$M \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

تصبح العلاقتان (14) و (15) :

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E_p \quad (17)$$

وتعني الأخيرة منها ان الطاقة الكامنة  $E_p$  بعد ان تحررت تحولت إلى طاقة حركية جديدة ناتجة عن سرعتين  $\vec{u}_1$  ،  $\vec{u}_2$  فقط . كما تعني الأولى ان  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  متماكستان ولهما نفس الحامل ، ومتناسبتان عكساً مع كتلتي القسمين المنفصلين  $m_1$  و  $m_2$  .

ومن الواضح ان الملاقين الأخيرتين تعينان سرعتين  $u_1$  و  $u_2$  ، إلا انها لا تعينان منحاهما . وتعين هذا المنحى امر منوط بآلية الانقسام ويجب ان يكون معلوماً بصورة عامة .

سنفرض ان حامل  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  يصنع زاوية  $\alpha$  مع السرعة  $\vec{v}$  للجسم قبل الانقسام . وسنمين كلاً من  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  و  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  والزوايتين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  اللتين تصنعهما  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  مع  $\vec{v}$  بالترتيب .

بمحل الملاقين المترافقتين (16) و (17) نجد ان  $u_1$  و  $u_2$  تعطيان بالملاقين (11) و (12) . وبأخذ محورين متعامدين ، احدهما يوازي  $\vec{v}$  ، وبإسقاط الملاقين (13) على المحورين نجد :

$$v_1 \cos \theta_1 = v + u_1 \cos \alpha$$

$$v_1 \sin \theta_1 = u_1 \sin \alpha$$

$$v_2 \cos \theta_2 = v - u_2 \cos \alpha$$

$$v_2 \sin \theta_2 = u_2 \sin \alpha$$

ومن السهل ان نرى من هذه المعادلات :

$$v_1 = \sqrt{v^2 + u_1^2 + 2 v u_1 \cos \alpha} \quad (18)$$

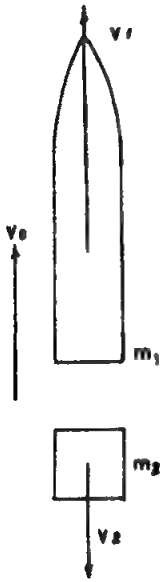
$$v_2 = \sqrt{v^2 + u_2^2 - 2 v u_2 \cos \alpha} \quad (19)$$

$$\text{tg } \Theta_1 = u_1 \sin \alpha / (v + u_1 \cos \alpha) \quad (20)$$

$$\text{tg } \Theta_2 = u_2 \sin \alpha / (v - u_2 \cos \alpha) \quad (21)$$

وهذا نكون قد عينا السرعتين  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  تمام التعين .

### III — الصواريخ ذات المراحل المتعددة :



الشكل (3)

ليكن الصاروخ ذو الكتلة  $M$  متحركاً بسرعة  $v_0$  في اللحظة  $t_0$  على مسار مستقيم شاقولي صاعد . ولنفرض انه بعد ذلك انقسم إلى قسمين كتلتاهما  $m_1$  و  $m_2$  بفعل طاقة كامنة  $E_p$  . وليكن  $m_2$  كتلة الجزء الذي ينبذه الصاروخ . وهذا الجزء هو المحرك النفث وملحقاته التي ادت مهمتها ولم تعد هناك اية حاجة لها . إن قذف هذا الجزء يؤدي إلى التخلص منه من جهة وإلى زيادة سرعة

الصاروخ من جهة أخرى . ويمكننا ان نرى ذلك بتطبيق نظريتي الاندفاع والطاقة . انظر الشكل (3) .

يجدر بنا هنا ان نلاحظ ان انفصال المحرك ، الذي ادى مهمته ، وملحقاته يتم خلال فترة قصيرة جداً من الزمن بحيث ان تغير السرعة الناتج

عن قوة الجاذبية الارضية صغير جداً يمكن اهماله الى جانب تغير السرعة الناتج عن تحول الطاقة الكامنة  $E_p$  الى طاقة حركية للجزأين  $m_1$  و  $m_2$  حيث  $m_1$  كتلة الصاروخ و  $m_2$  كتلة المحرك المنفصل .

لذا فان النظريتين المذكورتين تعطيان :

$$M v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} M v_0^2 + E_p = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (23)$$

ان حل هاتين العلاقتين ، بعد ملاحظة ان  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  محمولتان على نفس المستقيم الشاقولي ، يؤدي إلى :

$$v_1 = v_0 + \sqrt{\frac{2 E_p}{M} \cdot \frac{m_2}{m_1}} \quad (24)$$

$$v_2 = v_0 - \sqrt{\frac{2 E_p}{M} \cdot \frac{m_1}{m_2}} \quad (25)$$

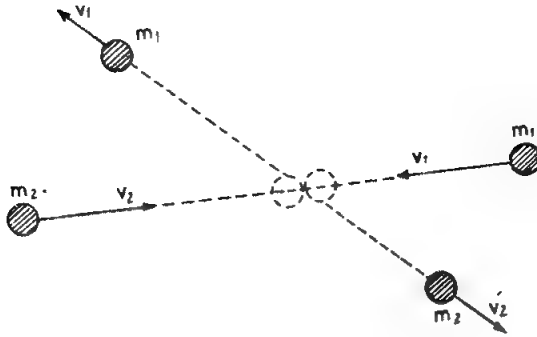
ويمجدر بنا ان نلاحظ ان سرعة الصاروخ  $v_1$  بعد انفصال المحرك الذي انتهت مهمته تكبر كلما كان المحرك المنفصل كبيراً ، لأن العلاقة (24)

تشير الى ان ازدياد  $\vec{v}_1$  يكون بازياد  $m_2$  وتقصان  $m_1$  . هذا ويمكن استنتاج العلاقتين الأخيرتين ( 24 ) و ( 25 ) ، من المناقشة التي سبقت في الفقرة « II » من هذا الفصل ، مع ملاحظة ان  $\alpha = 0$  وبالتالي  $\theta = 0$  . انظر العلاقات (11) و (12) و (18) و (19) .

#### IV — قاعدة نيوتن في الاصطدام — مرونة الاصطدام :

لتكن  $m_1$  و  $m_2$  كتلتا جسمين ماديين ولتكن  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  سرعتيهما

قبل ان يصطدما ببعضهما . ثم لتكن  $\vec{v}_1'$  و  $\vec{v}_2'$  سرعتيهما بعد الاصطدام . تنص قاعدة نيوتن على ان السرعة النسبية قبل الاصطدام وبعده تحقق العلاقة :



الشكل ( 4 )

$$\vec{v}_{12} = -\epsilon \vec{v}_{12} \quad (26)$$

حيث :

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \text{و} \quad \vec{v}'_{12} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 \quad (27)$$

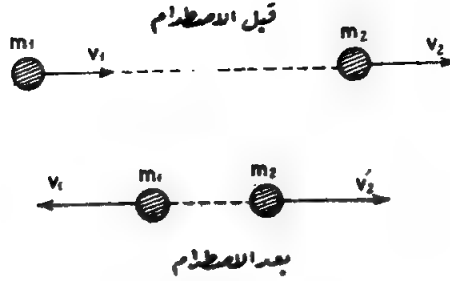
وحيث نسمي الثابت  $\epsilon$  بثابت مرونة الاصطدام او عامل الرسو .  
 اذا كانت  $\epsilon = 1$  نقول عن الاصطدام انه مرن تماماً .  
 واذا كانت  $\epsilon = 0$  نقول عن الاصطدام انه غير مرن .  
 وفيما عدا ذلك يكون الاصطدام مرناً جزئياً .

#### V — الاصطدام الراسي لجسيمين ماديين :

ليكن الجسيمن كرويين ، ولتكن  $m_1$  و  $m_2$  كتلتيهما . يقال عن اصطدامهما انه رأسي اذا كانت سرعتاهما محولتين على المستقيم الواصل بين مركزيهما . انظر الشكل (5) .

ولدراسة سرعتي الجسيمين بعد الاصطدام يمكن الاستفادة من مبدأ حفظ الاندفاع ، ومن قاعدة نيوتن . وهذان يعطيان العلاقات :





الشكل ( 5 )

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_2' = -\epsilon (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (28)$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (29)$$

ونجد بالحل :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) \vec{v}_1 + m_2 (1 + \epsilon) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (30)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1 (1 + \epsilon) \vec{v}_1 + (m_2 - \epsilon m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (31)$$

فسرعة كل من الجسمين بعد الاصطدام ترتبط بكتلتها وسرعتها قبل الاصطدام .  
وبعامل الرسو . وفيما يلي الحالتان الخاصتان للاصطدام تام المرونة والاصطدام  
عديم المرونة .

1 — الاصطدام المرن ( تام المرونة ) :

في هذه الحالة تكون  $\epsilon = 1$  . ونجد عندئذ :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2 m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (32)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{2 m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (33)$$

وبحساب الطاقة الحركية بعد الاصطدام نجد :

$$T' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = T \quad (34)$$

أي ان الطاقة الحركية ثابتة .

ب - الاصطدام غير المرن (عديم المرونة) :

في هذه الحالة  $e = 0$  ، وعندئذ :

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (35)$$

أي ان الكتلتين المصطدمتين اصطداماً غير مرن تلتصقان ببعضها وتتأمان الحركة بنفس السرعة . ويؤدي حساب الطاقة الحركية بعد الاصطدام الى :

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ &= (\frac{1}{2} m_1^2 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1 v_2) / (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (36)$$

والفرق بين الطائتين الحركيتين قبل وبعد الاصطدام هو :

$$\Delta T = T - T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad (37)$$

حيث :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (38)$$

تسمى الكتلة المختزلة للجسمين المتصادمين.

وتدل العلاقة (37) على أن  $\Delta T$  هو الجزء الضائع من الطاقة الحركية والذي تحول إلى حرارة . ونلاحظ أن مثل هذا الضياع لم يحدث قط في حالة الاصطدام المرن .

### VI — الاصطدام الجانبي :

إذا لم تكن سرعتا المتحركين محولتين على خط المركزين سمي اصطدامهما بالاصطدام الجانبي ، وهو كالاصطدام الرأسي يخضع لبدأ حفظ الاندفاع وقاعدة نيوتن . ولذلك نكتب :

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (39)$$

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_2' = \epsilon ( \vec{v}_1 - \vec{v}_2 ) \quad (40)$$

وبالحل نجد :

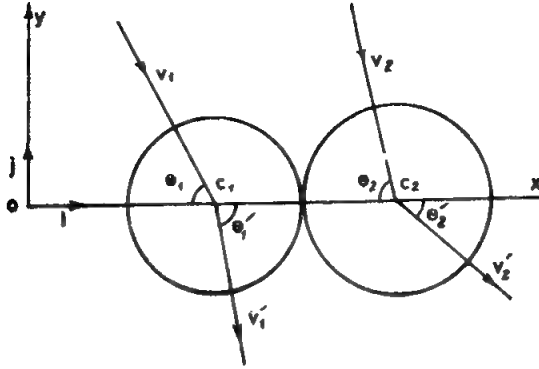
$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) \vec{v}_1 + m_2 (1 + \epsilon) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (41)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1 (1 + \epsilon) \vec{v}_1 + (m_2 - \epsilon m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (42)$$

لنستبر جملة مقارنة ثابتة بحيث ينطبق أحد محاورها (ox) على خط المركزين في لحظة الاصطدام ، كما في الشكل (6) . لتكن  $\theta_1$  و  $\theta_2$

زاويتي  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  مع ox ولتكن  $\theta_1'$  و  $\theta_2'$  زاويتي  $\vec{v}_1'$  و  $\vec{v}_2'$  مع ذلك المحور . إن الملاحظين الأخيرتين تعينان سرعتين بعد الاصطدام بشكل شعاعي . ويمكن اشتقاق أربع علاقات مكافئة لهما .

لما كان الاصطدام لا يؤثر إلا على مركبة السرعة المحولة على خط



الشكل (6)

المرکزین فان مركبة سرعة كل من الجسمین علی  $oy$  تحافظ علی قيمتها قبل وبعد الاصطدام، أي :

$$v_1 \sin \theta_1 = v_1' \sin \theta_1' \quad (43)$$

$$v_2 \sin \theta_2 = v_2' \sin \theta_2' \quad (44)$$

نعم ان السرعتين تكتبان بدلالة الزوايا واسعة الواحدة علی الشكل :

$$\vec{v}_1' = v_1' (\cos \theta_1' \vec{i} - \sin \theta_1' \vec{j}) \quad (45)$$

$$\vec{v}_2' = v_2' (\cos \theta_2' \vec{i} - \sin \theta_2' \vec{j}) \quad (46)$$

باسقاط الملاقين (41) و (42) علی  $ox$  نجد :

$$v_1' \cos \theta_1' = \frac{(m_1 - m_2 \epsilon) v_1 \cos \theta_1 + m_2 (1 + \epsilon) v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \quad (47)$$

$$v_2' \cos \theta_2' = \frac{m_1 (1 + \epsilon) v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - m_1 \epsilon) v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \quad (48)$$

وبالتعويض في (45) و (46) من (43) و (44) و (47) و (48) نحصل علی الملاقين التاليتين :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_1 + m_2 (1 + \epsilon) v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \vec{i} - \sin \theta_1 \vec{j} \quad (49)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1 (1 + \epsilon) v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - \epsilon m_1) v_2 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \vec{i} - v_1 \sin \theta_2 \vec{j} \quad (50)$$

ونلاحظ ان الملاقين الاخيرتين تعينان  $\vec{v}_1'$  و  $\vec{v}_2'$  بدلالة طويلتي

السرعتين  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  قبل الاصطدام ، وزاويتيها  $\theta_1$  و  $\theta_2$  مع خط المركزين . وهاتان الملاقتان مكافئتان تمام التكافؤ للملاقين (41) ، (42) .

\* \* \*



## الفصل التاسع

### عزوم العطالة

— تعاريف

— نظريات عزوم العطالة

— تطبيقات على حساب عزوم العطالة

— عزم عطالة جسم حول محور ما زوايا توجيهه معلومة

— مصفوفة العطالة

— مجسم العطالة





# I - تعاريف :

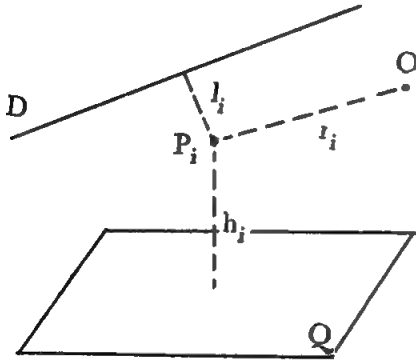
لتكن النقطة O والمستقيم D والمستوي Q . وليكن P جسماً مادياً  
كتلته m وأبعاده عن O و D و Q هي r و l و h بالترتيب . نسمي  
المقادير التالية :

$$I_O = m r^2 \quad (1)$$

$$I_D = m l^2 \quad (2)$$

$$I_Q = m h^2 \quad (3)$$

عزوم عطالة الجسم حول النقطة O والمحور D والمستوي Q بالترتيب .



الشكل ( 1 )

لتكن كذلك  $P_i$  مجموعة

جسيمات مادية كتلتها  $m_i$  وأبعادها  
عن النقطة O هي  $r_i$  وعن المحور D  
هي  $l_i$  وعن المستوي Q هي  $h_i$  ،  
كما يبين الشكل ( 1 ) . نسمي  
المقادير التالية :

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 \quad (4)$$

$$I_D = \sum_i m_i l_i^2 \quad (5)$$

$$I_Q = \sum_i m_i h_i^2 \quad (6)$$

عزوم عطالة هذه المجموعة حول النقطة O والمحور D والمستوي Q  
بالترتيب .

هذا اذا كانت المجموعة المادية متقطعة . أما اذا كانت المجموعة جسماً مستمراً  $S$  ، كما يبين الشكل ( 2 ) ، فاننا نستطيع أن نقسّمه اعتبارياً الى مجموعة أجزاء لامتناهية في الصغر يمثلها العنصر التفاضلي  $d\tau$  الذي كتلته :

$$dm = \sigma d\tau \quad (7)$$

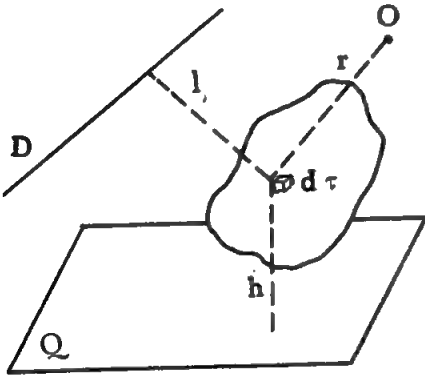
حيث  $\sigma$  كثافة هذا الجسم عند النقطة  $P$  . وتكون أبعاد هذا العنصر عن  $O$  و  $P$  و  $Q$  هي أبعاد النقطة  $P$  عنها أي  $r$  و  $l$  و  $h$  بالترتيب .

وتصبح عزوم العطالة المطاة بالعلاقات ( 4 ) و ( 5 ) و ( 6 ) كما يلي :

$$I_O = \int r^2 dm \quad (8)$$

$$I_D = \int l^2 dm \quad (9)$$

$$I_Q = \int h^2 dm \quad (10)$$



الشكل ( 2 )

حيث نحسب التكاملات على جميع الجسم  $S$  . ويجدر بالذكر أن الكثافة  $\sigma$  والأبعاد  $r$  و  $l$  و  $h$  كلها قابلة للموضع  $P$  بصورة

عامة . فإذا كان الجسم جسماً كانت  $\sigma$  الكثافة الحجمية و  $d\tau$  عنصراً تفاضلياً حجمياً وكان التكامل بالتالي ثلاثياً . أما اذا كان الجسم سطحياً فان  $\sigma$  الكثافة السطحية و  $d\tau$  عندئذ عنصر تفاضلي سطحي ، ويصبح التكامل ثنائياً . وأخيراً ، اذا كان الجسم خطاً فالكثافة خطية والعنصر التفاضلي خطي والتكامل أحادي .

تبين العلاقات ( 4 ) و ( 5 ) و ( 6 ) وكذلك العلاقات ( 8 ) و ( 9 )

و ( 10 ) أن أي عزم عطالة للمجموعة يساوي مجموع عزوم عطالة أجزائها .  
وملاحظ أن جميع حدود العلاقات المعرفة لعزوم المطالة من طبيعة واحدة  
هي جداء كتلة بمربع بعد . وهذا الأمر يقترح علينا أن نكتب الطرف  
الثاني لهذه العلاقات كحد واحد له الطبيعة ذاتها . فإذا اخترنا  $M$  لتمثل  
كتلة المجموعة أو الجسم أمكن عندئذ كتابة العلاقاتين ( 4 ) و ( 8 ) على  
الشكل التالي :

$$I_O = M R_O^2 \quad ( 11 )$$

حيث نسمي المقدار  $R_O$  بنصف قطر العطالة حول النقطة  $O$  . وهو يساوي :

$$R_O = \sqrt{I_O / M} \quad ( 12 )$$

وبشكل مماثل يمكن أن نكتب ( 5 ) و ( 9 ) كما يلي :

$$I_D = M R_D^2 \quad ( 13 )$$

حيث يكون  $R_D$  نصف قطر عطالة الجسم حول المحور  $D$  ويعطى بالعلاقة :

$$R_D = \sqrt{I_D / M} \quad ( 14 )$$

ونكتب أخيراً ( 6 ) و ( 10 ) بالشكل :

$$I_Q = M R_Q^2 \quad ( 15 )$$

ويكون بالتالي  $R_Q$  نصف قطر عطالة الجسم حول المستوي  $Q$  ويعطى  
بالعلاقة :

$$R_Q = \sqrt{I_Q / M} \quad (16)$$

وفي ذلك كله تحسب كتلة الجسم أو المجموعة من إحدى العلاقتين :

$$M = \sum_i m_i \quad (17)$$

$$M = \int \sigma d\tau \quad (18)$$

وسنرى فيما بعد عند دراسة حركة الجسم الصلب الدورانية أن لنصف قطر العطالة معنى وأهمية خاصين .

## II - نظريات عزوم العطالة :

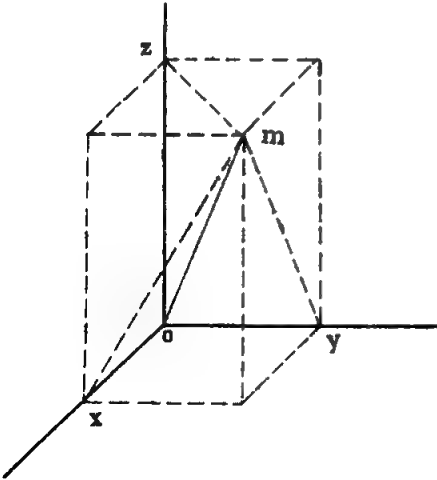
تخضع عزوم العطالة لنظريات مختلفة نورد فيما يلي أهمها :

أ - النظرية الأولى : تحدد هذه النظرية العلاقة بين عزوم عطالة جسم حول نقطة ما وعزوم عطالته حول مجموعة محاور متعامدة فيها بينها ومارة

من تلك النقطة . وتنص على أن مجموع عزوم عطالة الجسم حول هذه المحاور يساوي ضعف عزوم عطالته حول تلك النقطة .

البرهان :

بالاستعانة بالشكل ( 3 ) يمكن أن نكتب عزوم العطالة حول النقطة  $o$  وحول المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  بالشكل التحليلي التالي :



الشكل ( 3 )

$$\int (x^2 + y^2 + z^2) d m \quad \text{أو} \quad I_0 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (19)$$

$$\int (y^2 + z^2) d m \quad \text{أو} \quad I_{0x} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad (20)$$

$$\int (z^2 + x^2) d m \quad \text{أو} \quad I_{0y} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \quad (21)$$

$$\int (x^2 + y^2) d m \quad \text{أو} \quad I_{0z} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (22)$$

ويجمع العلاقات الثلاث الاخيرة طرفاً الى طرف ومقارنة النتائج بالعلاقة

( 19 ) لمجد أن :

$$I_{0x} + I_{0y} + I_{0z} = 2 I_0 \quad (23)$$

و مضمون هذه العلاقة مطابق لنص النظرية .

ب - النظرية الثانية : نص هذه النظرية على أن مجموع عزوم الجسم

أو المجموعة حول مجموعة مستويات متعامدة في نقطة ما يساوي عزم عطالة

هذا الجسم أو هذه المجموعة حول تلك النقطة .

البرهان :

يتم البرهان على صحة هذه النظرية ايضاً بالشكل ( 3 ) و كتابة عزوم

العطالة المعنية بأشكالها التحليلية :

$$I_{oxy} = \sum_i m_i z_i^2 \quad \text{أو} \quad \int z^2 dm \quad (24)$$

$$I_{oyz} = \sum_i m_i x_i^2 \quad \text{أو} \quad \int x^2 dm \quad (25)$$

$$I_{ozx} = \sum_i m_i y_i^2 \quad \text{أو} \quad \int y^2 dm \quad (26)$$

يجمع هذه العلاقات ومقارنة المجموع بالعلاقة ( 19 ) نجد أن :

$$I_{oxx} + I_{oyz} + I_{ozx} = I_0 \quad (27)$$

حيث أن مضمون هذه العلاقة مطابق لنص النظرية .

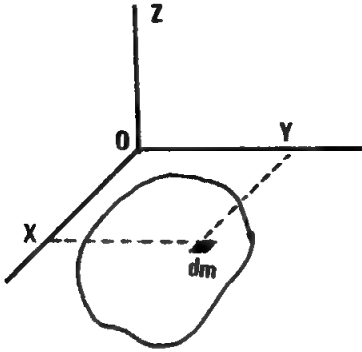
ج - النظرية الثالثة : تنص هذه النظرية على أن مجموع عزوم عطالة جسم أو مجموعة حول ثلاثة محاور متعامدة في نقطة يساوي ضعف مجموع عزوم العطالة حول المستويات المتعامدة والمتقاطعة مثنى مثنى وفق تلك المحاور . وتعتبر هذه النظرية نتيجة مباشرة للنظريتين السابقتين ، حيث أن مقارنتهما تؤدي الى العلاقة :

$$I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2 ( I_{oxy} + I_{oyz} + I_{ozx} ) \quad (28)$$

وهو مضمون النظرية .

د - النظرية الرابعة : تعرف هذه النظرية بنظرية المحاور المتعامدة. وتنص على أنه اذا كان الجسم مستوياً فان عزم عطالته حول محور  $oz$  متعامد معه يساوي مجموع عزمي عطالته حول محورين  $ox$  و  $oy$  متعامدين فيما بينهما ومع المحور  $oz$  وواقعين في مستوي الجسم .

البرهان :



يبين الشكل ( 4 ) الجسم

المستوي والمحاور المعنية  $ox$  و  $oy$

و  $oz$  . ويتضح من الشكل أن :

$$\begin{aligned} I_{oz} &= \int (x^2 + y^2) dm \\ &= \int x^2 dm + \int y^2 dm \\ &= I_{oy} + I_{ox} \quad (29) \end{aligned}$$

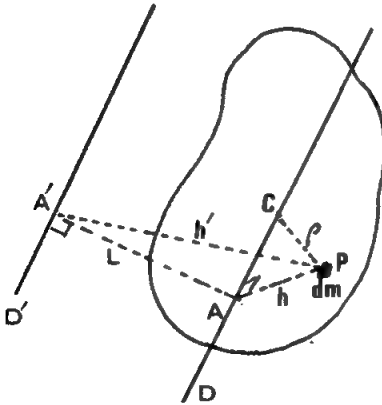
الشكل ( 4 )

وهذا مطابق لمضمون النظرية .

٥ - النظرية الخامسة : وتعرف هذه النظرية بنظرية المحاور المتوازية

أو نظرية هويغنز : وتنص على أن عزم عطالة جسم حول محور ما  $D'$  يساوي عزم عطالته حول محور  $D$  يوازي  $D'$  ويمر من مركز كتلة الجسم مضافاً إليه جداء كتلة الجسم بمربع البعد بين المحورين .

البرهان :



ليكن  $I'$  عزم عطالة الجسم حول المحور  $D'$  وليكن  $I$  عزم عطالته حول المحور  $D$  . وليكن  $L$  البعد بين المحورين و  $G$  مركز كتلة الجسم و  $M$  كتلته وليكن  $dm$  عنصر الكتلة عند النقطة  $P$  على بعد  $h$  من  $D$  وعلى بعد  $h'$  من  $D'$  ،

الشكل ( 5 )

كما يبين الشكل ( 5 ) .

ان العزم حول  $D'$  يكتب كما يلي :

$$\begin{aligned}
 I' &= \int (\vec{h}')^2 dm \\
 &= \int (\vec{h} + \vec{L})^2 dm \\
 &= \int h^2 dm + \int L^2 dm \\
 &\quad + 2 \int \vec{L} \cdot \vec{h} dm \\
 &= I + M L^2 + 2 \int \vec{L} \cdot \vec{h} dm \quad (30)
 \end{aligned}$$

ويمكن أن نبرهن أن التكامل الأخير معدوم عن طريق استعمال مركز الكتلة حيث يمكن أن نكتبه كما يلي :

$$\begin{aligned}
 \int \vec{L} \cdot \vec{h} dm &= \int \vec{L} \cdot (\vec{AC} + \vec{\rho}) dm \\
 &= \vec{L} \cdot \vec{AC} \int dm + \vec{L} \cdot \int \vec{\rho} dm
 \end{aligned}$$

ان التكامل الاول معدوم لتعايد  $\vec{L}$  و  $\vec{AC}$  والتكامل الثاني معدوم حسب خواص مركز الكتلة . وتصبح العلاقة ( 30 ) :

$$I' = I + M L^2 \quad (31)$$

وذلك هو ما يفيد به نص النظرية .

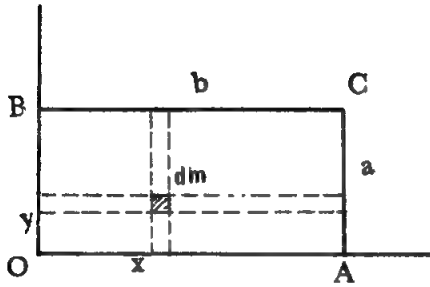


### III - تطبيقات على حساب عزوم العطالة :

٢ - عزم عطالة مستطيل متجانس حول أحد أضلاعه وحول رؤوسه،

ليكن المستطيل  $OACB$  وليكن ضلعا  $OA = a$  و  $OB = b$  .

نحسب عزوم عطالته حول ضلعيه وأحد رؤوسه بالاستعانة بالشكل ( ٦ ) :

$$I_{Ox} = \int y^2 dm$$


$$= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \sigma y^2 dx dy$$

$$= \frac{\sigma a b^3}{3} = \frac{M b^3}{3} \quad (32)$$

وبمثل ذلك نجد عزم العطالة حول الضلع

الشكل ( ٦ )

الآخر :

$$I_{Oy} = \frac{\sigma a^3 b}{3} = \frac{M a^3}{3} \quad (33)$$

أما عزم العطالة حول الرأس  $O$  وهو نفسه عزم العطالة حول المحور  $z$  المتعامد معه فيساوي مجموع العزمين السابقين حول الضلعين وذلك حسب النظرية الرابعة . أي :

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy} = \frac{\sigma a b}{3} (a^3 + b^3) = \frac{M}{3} (a^3 + b^3) \quad (34)$$

ب - عزم عطالة حلقة متجانسة حول قطرها :

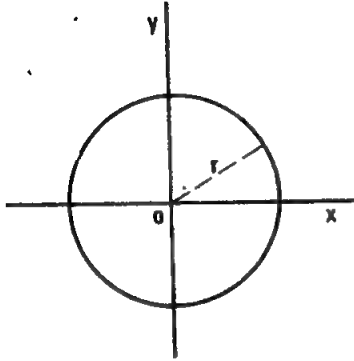
بسبب التناظر والتماثل فان :

$$I_{ox} = I_{oy}$$

وحسب النظرية الرابعة :

$$I_o = I_{ox} + I_{oy} = 2 I_{ox}$$

وبما أن جميع نقاط الحلقة على بعد واحد من  $O$  فان عزم العطالة حول  $O$  هو  $M r^2$  ومنه :



الشكل ( ٧ )

$$I_{ox} = \frac{M r^2}{2} \quad (35)$$

حيث  $r$  نصف قطر الحلقة و  $M$  كتلتها كما في الشكل ( ٧ ) .

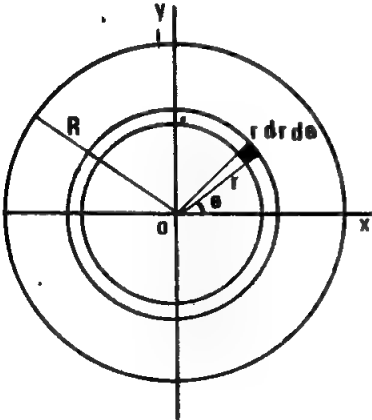
ج - عزم عطالة قرص دائري متجانس حول أحد أقطاره :

للاسباب الواردة في ( ب )

من هذه الفقرة نرى أن :

$$I_{ox} = \frac{1}{2} I_o$$

فاذا اعتبرنا الاحداثيات القطبية  $r$  و  $\theta$  في الشكل ( ٨ ) كان عنصر السطح :



الشكل ( ٨ )

$$d\tau = r dr d\theta$$

ويكون عزم العطالة حول  $O$  مساوياً ما يلي :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int r^2 dm \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \sigma r^2 dr d\theta \\ &= \frac{\sigma \pi R^4}{2} = \frac{M R^2}{2} \end{aligned}$$

ومنه :

$$I_{Ox} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{M R^2}{4} \quad (36)$$

د - عزم عطالة كرة جوفاء حول قطرها :

حسب النظرية الاولى واعتماداً على أن عزم العطالة متساوية حول جميع الاقطار نرى أن :

$$I_{Ox} = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} M R^2 \quad (37)$$

هـ - عزم عطالة كرة صماء حول قطرها :

يمكن دون اللجوء الى شكل هندسي مرسوم أن نتخيل كرة جوفاء عنصرية مركزها مركز الكرة ونصف قطرها  $r$  وسماكتها  $dr$  حيث تكون كتلتها :

$$dm = 4\pi r^2 \sigma dr$$

ان عزم عطالة هذه الكرة العنصرية حول  $O$  هو :

$$d I_0 = 4 \pi \sigma r^4 d r$$

ولتحصل بتكامل هذا المقدار على عزم العطالة الكلي للكرة الصماء كاملة حول o . أي :

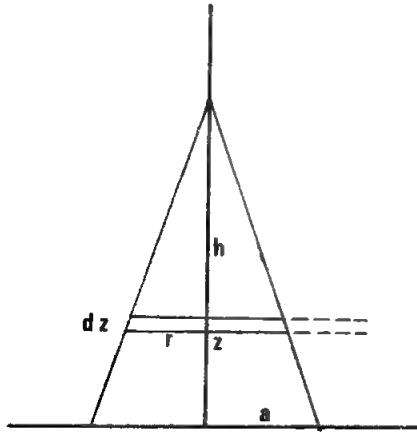
$$I_0 = \int_0^R 4 \pi \sigma r^4 d r = \frac{3}{5} M R^2$$

ويكون عزم العطالة حول أحد الاقطار :

$$I_{0x} = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{5} M R^2 \quad (38)$$

و - عزم عطالة مخروط دوراني حول محوره :

ليكن h ارتفاع المخروط و a نصف قطر قاعدته الدائرية وذلك كما يبين



الشكل ( 9 )

الشكل ( 9 ) الذي يمثل مقطعاً ماراً من المحور . ولنتخير كعنصر تفاضلي شريحة دائرية موازية للقاعدة على بعد z منها وذات سماكة dz ونصف قطر r . ان عزم عطالة هذه الشريحة الدائرية حول المحور ، حسب ( 8 ) من هذه الفقرة ، يساوي نصف كتلتها بمربع نصف قطرها . أي :

$$d I_{0z} = \frac{1}{2} ( \sigma \cdot \pi r^4 dz ) \quad (39)$$

ويكون عزم عطالة المخروط حول o z مساوياً تكامل هذا المقدار أي :

$$I_{oz} = \int \frac{1}{2} \sigma \pi r^4 dz$$

لكن الشكل يبين أن :

$$\frac{r}{a} = \frac{h-z}{h} \quad \text{أو} \quad r = a \frac{h-z}{h}$$

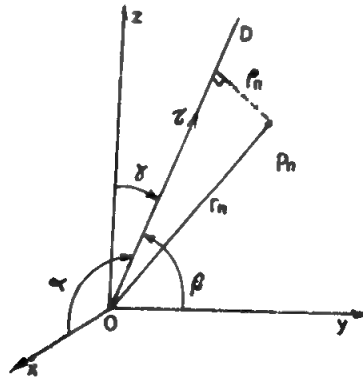
ومنه :

$$I_{oz} = \int_{z=0}^h \frac{1}{2} \sigma \pi a^4 \left( \frac{h-z}{h} \right)^4 dz = \frac{3}{10} M a^2 \quad (40)$$

حيث  $M$  كتلة المخروط .

#### IV — عزم عطالة جسم حول محور ما زوايا توجيهه معلومة :

ليكن الجسم  $S$  والمحور  $D$  الذي يراد حساب عزم العطالة حوله .  
ولتكن  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  الزوايا التي يصنعها هذا المحور مع المحاور الإحداثية  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  والتي تسمى بزوايا توجيه المحور  $D$  .



الشكل (10)

تكن نقطة  $P_n$  من الجسم ولتكن  $x_n$  ،  $y_n$  ،  $z_n$  إحداثياتها و  $\vec{r}_n$  شعاع موضعها . فإذا كانت  $e_n$  بعدها عن المستقيم  $D$  الذي شعاع واحدته  $\vec{\tau}$  فإن عزم عطالة هذه النقطة بالنسبة لهذا المحور يعطى بالعلاقة :

$$I_n = m_n e_n^2 \quad (41)$$

ولكن :

$$e_n^2 = (\vec{r}_n \wedge \vec{\tau})^2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix}^2 \quad (42)$$

وبنشر هذه العلاقة والتمويض في (41) نجد :

$$I_n = m_n \left[ (y_n^2 + z_n^2) \cos^2 \alpha + (z_n^2 + x_n^2) \cos^2 \beta + (x_n^2 + y_n^2) \cos^2 \gamma - 2x_n y_n \cos \alpha \cos \beta - 2y_n z_n \cos \beta \cos \gamma - 2z_n x_n \cos \alpha \cos \gamma \right] \quad (43)$$

إن عزم عطالة الجسم حول المحور  $D$  هو مجموع عزوم عطالة جميع نقاطه حول هذا المحور ولذلك فإنه ينتج بجمع الموزوم المثلة بالعلاقة (43)، يؤدي ذلك إلى العلاقة :

$$I = \sum_n I_n = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \quad (44)$$

حيث :

$$I_{xx} = \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2) \quad (45)$$

$$I_{yy} = \sum_n m_n (z_n^2 + x_n^2) \quad (46)$$

$$I_{zz} = \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2) \quad (47)$$

هي بالترتيب عزوم عطالة الجسم حول المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  وحيث :

$$I_{xy} = - \sum_n m_n \cdot x_n \cdot y_n = I_{yx} \quad (48)$$

$$I_{yz} = - \sum_n m_n \cdot y_n \cdot z_n = I_{zy} \quad (49)$$

$$I_{zx} = - \sum_n m_n \cdot z_n \cdot x_n = I_{xz} \quad (50)$$

تسمى بمضارب العطالة ، وقد تضمنت الإشارة السالبة لتلافي حمل هذه الإشارة في العلاقة الرئيسية (44) .

#### V — مصفوفة العطالة :

تسمى المصفوفة التي حدودها هي عزوم عطالة الجسم ومضارب عطالته بمصفوفة العطالة . وتكتب على الشكل التالي :

$$(I) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (51)$$

ولهذه المصفوفة أهمية كبرى في دراسة الحركة العامة للجسم الصلب وسنرى ذلك في حينه . ويجدر بنا أن نلاحظ أن حدود القطر الرئيسي لهذه المصفوفة مؤلفة من عزوم العطالة حول المحاور الاحداثية وأن بقية الحدود متناظرة بالنسبة لاقطر الرئيسي .

#### VI — مجسم العطالة :

إن العلاقة (44) تعطي عزم عطالة الجسم حول محور ما بدلالة عزوم العطالة حول المحاور الاحداثية وزوايا توجيه المحور  $\alpha, \beta, \gamma$  . ومن الطبيعي أن نرى أن هذا العزم يتغير بتغير الزوايا أي بتغير المحور  $D$  . وسنحاول فيما يلي ربط عزم العطالة  $I$  بشمار  $\rho$  محمول على  $D$  ومعرف بالعلاقين :

$$\vec{\rho} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \quad (52)$$

$$\vec{\rho} = \vec{\tau} / \sqrt{I} \quad (53)$$

من هاتين العلاقتين نجد مركبات الشعاع  $\vec{\rho}$  على المحاور 'ox' ، 'oy' ، 'oz' وهي :

$$a = \cos \alpha / \sqrt{I} , b = \cos \beta / \sqrt{I} , c = \cos \gamma / \sqrt{I} \quad (54)$$

بتقسيم طرفي العلاقة (44) على  $I$  والتعويض فيها من العلاقة (54) نجد :

$$I_{xx} a^2 + I_{yy} b^2 + I_{zz} c^2 + 2 I_{xy} a b + 2 I_{yz} b c + 2 I_{zx} c a = 1 \quad (55)$$

ومن الواضح أن هذه العلاقة تمثل قطعاً ناقصاً مجسماً لا تتعاقب محاوره بصورة عامة على المحاور الاحداثية 'ox' ، 'oy' ، 'oz' لوجود الحدود التي تحتوي على الجداءات المختلطة 'ab' ، 'bc' ، 'ca' للمتحويلات 'a' ، 'b' ، 'c' . نسمي هذا القطع « مجسم المطالة » . ونلاحظ أن رأس الشعاع  $\vec{\rho}$  الذي احداثياته 'a' ، 'b' ، 'c' يقع دوماً على هذا المجسم مهما كانت هذه الاحداثيات .

وأخيراً يمكن الحصول على عزم المطالة حول محاور يحمل  $\vec{\tau}$  او  $\vec{\rho}$  من العلاقة (53) التي تكتب على الشكل :

$$I = \tau^2 / \rho^2 = \frac{1}{\rho^2} \quad (56)$$

حيث يمكن إيجاد  $\rho^2$  من مجسم المطالة .



# الفصل العاشر

## الحركة المستوية للجسم الصلب

- الحركة الانسحابية المستوية
- الدوران حول محور ثابت
- الحركة المستوية العامة للجسم الصلب
- درجات الحرية
- النظريات الأساسية في حركة الجسم الصلب حول محور
- تطبيق : دراسة النواس المركب
- الحركة المستوية العامة للجسم الصلب
- تطبيق : حركة اسطوانة دائرية على مستو مائل
- المركز الآني للدوران والمحور الآني للدوران
- تطبيق على تدرج اسطوانة على مستو مائل
- توازن الجسم الصلب
- تطبيق



عرفنا الجسم الصلب سابقاً بأنه الجسم الذي تحافظ جميع نقاطه على أبعادها النسبية فيما بينها . هذا وتنطبق على الجسم الصلب جميع الدراسات والنظريات التي أتينا عليها سابقاً . ستعرض في الفصول القادمة إلى الدراسة العامة لحركة جسم صلب في الفراغ . أما الآن فسيقتصر بحثنا على دراسة حركته المستوية أي تلك التي تحدث عندما تتحرك جميع نقاطه في مستويات متوازية . وتتألف هذه الحركة بصورة عامة من نوعين من الحركات .

١ - إنسحاب .

٢ - دوران حول محور ثابت .

## I — الحركة الانسحابية المستوية :

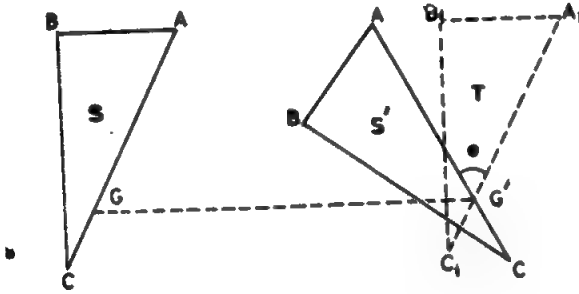
نقول عن الجسم الصلب أنه يتحرك حركة مستوية إنسحابية فيما إذا كانت كل نقطة منه تتحرك في مستو ثابت وكان المستقيم الواصل بين أي نقطتين من الجسم موازياً لنفسه في جميع أوضاع الجسم . ومسارات نقاط الجسم هي عندئذ منحنيات متوازية واقمة في مستويات متوازية .

## II — الدوران حول محور ثابت :

يمكن أن تبين بسهولة أنه في حركة الجسم الصلب حركة دورانية حول محور ثابت بالنسبة للجسم تبقى جميع نقاط الجسم على مسافات ثابتة من ذلك المحور .

### III — الحركة المستوية العامة للجسم الصلب :

في الحالة العامة للحركة المستوية للجسم الصلب لا نجد نوعاً واحداً من الحركة . فهي ليست انسحاباً فقط ولا دوراناً فقط . ويمكن أن نرى من المثال التالي أن هذه الحركة العامة يمكن أن تتحلل إلى حركة انسحابية وحركة دورانية حول محور متماثل مع الجسم الصلب . يتفق هذا المحور عادة بحيث يمر من مركز كتلة الجسم المتحرك . ولهذا الاختيار فضل في تبسيط الدراسة الكمية للحركة . ومع ذلك فلن نشترط ذلك في المثال التالي .



الشكل (1)

ليكن  $ABC$  مثلثاً رؤوسه النقاط الناتجة  $A, B, C$  من الجسم والواقعة في مستوى يوازي مستوى الحركة الثابت كما في الشكل (1) . ولنفرض أن الجسم قد انتقل من الوضع  $S$  إلى الوضع  $S'$  خلال فترة زمنية قصيرة فالحركة التي تمت بين الوضعين يمكن أن نحللها إلى حركتين :

١ - انتقال الجسم من الوضع  $S$  إلى الوضع  $T$  بحيث بقي الجسم موازياً لنفسه وتحرك حركة انسحابية مستقيمة .

٢ - دوران حول محور يمر من نقطة ثابتة  $G'$  ناظماً على مستوى الحركة . ومقدار هذا الدوران يتحدد بالزاوية الكائنة بين وضعي أي ضلع من أضلاع المثلث في الوضعين  $S$  و  $T$  .

#### IV — درجات الحرية :

لما كان وضع الجسم في الحركة الانسحابية يتمين بنقطة واحدة وهذه الأخيرة لها درجتان من الحرية في الحركة المستوية فاننا نستنتج أن للحركة الانسحابية المستوية درجتان من الحرية أيضاً .

أما بالنسبة للدوران حول محور ثابت فإن هناك درجة حرية واحدة لأن وضع الجسم الدائر يتمين بزاوية الدوران « متحول واحد » .

نستنتج من ذلك أن الحركة المستوية العامة للجسم الصلب ذات ثلاث درجات من الحرية لتركيبها من الحركتين السابقتين .

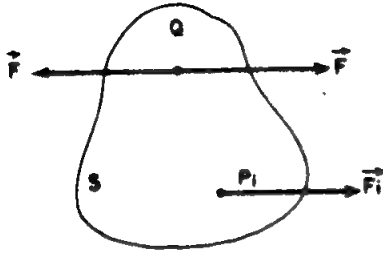
#### V — النظريات الأساسية في حركة الجسم الصلب حول محور :

سنتناول في هذه الفقرة النظريات الأساسية التي تساعدنا على دراسة الحركة المستوية العامة للجسم الصلب .

#### ٢ — نظرية المزدوجات :

إذا أثرت مجموعة من القوى في جسم صلب فإن هذه المجموعة يمكن أن ترد الى مجموعة مكافئة مؤلفة من قوة وحيدة تؤثر في نقطة معينة ومزدوجة مناسبة .

البرهان : لتكن  $\vec{F}_i$  القوة المؤثرة في النقطة  $P_i$  من الجسم . ولنختار نقطة ما Q من الجسم أيضاً . ان وضع الجسم الحركي لا يتغير إذا أضفنا قوتين متماكستين  $\vec{F}$  و  $-\vec{F}$  مؤثرتين في نفس النقطة Q ، لأن إحداها تطل الأخرى ، الشكل (2) . وزى بسهولة ان القوة  $\vec{F}_i$  « المؤثرة في  $P_i$  » تكافئ عندئذ مجموعة القوى  $\vec{F}_i$  المؤثرة في P و  $\vec{F}$  و  $-\vec{F}$  « المؤثرتين في Q » . فاذا اخترنا  $\vec{F} = \vec{F}_i$  أصبحت المجموعة المذكورة مؤلفة من القوة  $\vec{F}_i$



الشكل (2)

المؤثرة في  $P_i$  والقوتين

$\vec{F}_i$  و  $\vec{F}$  — المؤثرين في Q .

فاذا اعتبرنا  $\vec{F}_i$  المؤثرة في  $P_i$

و  $\vec{F}_i$  — المؤثرة في Q

كمزدوجة فان المجموعة تكافئ.

قوة  $\vec{F}_i$  مؤثرة في Q ومزدوجة

$\vec{F}_i$  و  $\vec{F}_i$  — عزمها يساوي  $\vec{F}_i \wedge \vec{QP}$  . فالقوة  $\vec{F}_i$

قد ردت إلى قوة ومزدوجة

فاذا طبقنا نفس الفكرة على

جميع القوى  $\vec{F}_i$  المثلة في

الشكل (3) فانها عندئذ

تكافئ بمجموع القوى  $\vec{F}_i$  المؤثرة

في Q مضافاً اليها مزدوجة

عزمها يساوي مجموع عزوم

المزدوجات المقابلة . اي ان

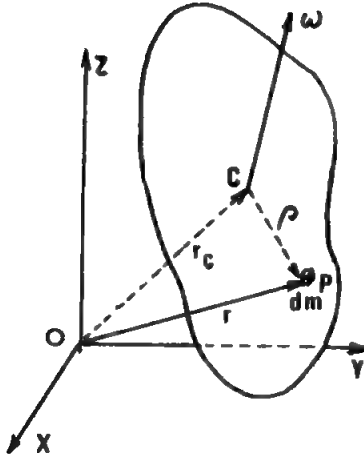
مجموعة القوى  $\vec{F}_i$  قد ردت

إلى قوة وحيدة  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  توتر في النقطة المختارة Q ومزدوجة عزمها

$$\vec{\Lambda} = \sum \vec{QP}_i \wedge \vec{F}_i$$

وهكذا فقد امكن رد مجموعة القوى الى قوة وحيدة ومزدوجة  
مناسبتين .

### ب — نظرية الطاقة الحركية :



الطاقة الحركية لجسم  
صلب مركز كتلته C وعزم  
عطالته حول محور مار من  
C تساوي مجموع الطاقة  
الحركية لمركز كتلته والجداء  
 $\frac{1}{2} I \omega^2$  حيث  $\omega$  السرعة  
الدورانية حول ذلك المحور  
أي :

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1)$$

البرهان : ليكن الجسم

شكل (4)

الصلب S المتحرك بالنسبة للجملة xyz كما في الشكل (4). ان الطاقة الحركية  
للجسم هي :

$$T = \int \frac{1}{2} r'^2 dm = \frac{1}{2} \int (\vec{r}')^2 dm = \frac{1}{2} \int (\vec{e}' + \vec{r}_c')^2 dm \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} r_c'^2 \int dm + \frac{1}{2} \int e'^2 dm + \int \vec{e}' \cdot \vec{r}_c' dm \quad (3)$$

ان الحد الاول من الطرف الايمن يساوي

$$\frac{1}{2} \int r_c'^2 dm = \frac{1}{2} m r_c'^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 \quad (4)$$

أما الحد الثاني فيساوي

$$\frac{1}{2} \int \rho'^2 dm = \frac{1}{2} \int (\rho \omega)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5)$$

أما الحد الثالث فهو معلوم لأن

$$\frac{1}{2} \int \vec{\rho}' \cdot \vec{r}'_c dm = \frac{1}{2} \vec{r}'_0 \cdot \int \vec{\rho} \cdot dm = 0 \quad (6)$$

إذا :

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (7)$$

وهي العلاقة المطلوب البرهان على صحتها .

ويجب ان نلاحظ ان الطاقة الحركية للجسم الناتجة عن دورانه حول محور ما هي :

$$\frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8)$$

حيث  $I$  عزم عطالته حول هذا المحور و  $\omega$  السرعة الزاوية للدوران .

ح — نظرية الطاقة الكلية :

إن هذه النظرية تعتمد على مبدأ انخفاض الطاقة . فإذا كانت القوى المؤثرة في الجسم مشتقة من كون كانت الطاقة الكلية  $E = T + V$  ثابتة أي محفوظة وتكتب عندئذ هذه العلاقة على الشكل التالي :

$$\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + V = E \quad \text{ثابت} \quad (9)$$

وقبل تطبيق هذه النظرية التي تمد من ام نظريات حركة الجسم الصلب يجب التأكد من أن الطاقة محفوظة .

د — نظرية الاندفاع الزاوي :

إذا كان الجسم المتحرك يدور حول محور ثابت وكانت  $I$  عزم عطالته



حول ذلك المحور فإن الاندفاع الزاوي للجسم يساوي

$$\vec{\Omega} = I \vec{\omega} \quad (10)$$

البرهان : يطل الاندفاع الزاوي للجسم حول محور الدوران بالملاقة

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \text{ او } \vec{\Omega} = \int \vec{r} \wedge \vec{v} dm \quad (11)$$

حيث كل من الصيغتين تكافئ الأخرى وحيث  $r_i$  يمثل بعد النقطة  $i$  عن محور الدوران . ولما كانت حركة كل نقطة من الجسم هي حركة دائرية مركزها واقع على محور الدوران فإن :

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \quad (12)$$

وعندئذ يكون لدينا :

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \quad (13)$$

ولكن بصورة عامة :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (14)$$

إذن :

$$\vec{\Omega} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \quad (15)$$

أو :

$$= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad (16)$$

وهي العلاقة التي كنا نسعى وراء البرهان على صحتها . ونلاحظ أن الحد

الأخير من العلاقة (15) معدوم لتعاود  $\vec{r}_i$  مع  $\vec{\omega}$  الأمر الذي يجعل الجداء الداخلي لها معدوماً .

هـ — نظرية عزم القوى :

إن العزم الكلي حول محور الدوران للقوى المؤثرة في الجسم الدائر بتأثيرها

$$\vec{\Lambda} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\omega}' = I \vec{\alpha} \quad (17)$$

حيث  $\vec{\alpha}$  يمثل التسارع الزاوي .

البرهان : لقد رأينا سابقاً أن الاندفاع الزاوي وعزم القوى المؤثرة يرتبطان ببعضهما في الحالة العامة بالعلاقة :

$$\vec{\Lambda} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

إن استعمال العلاقة (10) في العلاقة الأخيرة وإدراك أن عزم المطالة ثابت يؤديان إلى العلاقة المطلوبة أي :

$$\vec{\Lambda} = \frac{d}{dt} ( I \vec{\omega} ) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

و — نظرية العمل المنصري :

إن العمل المنصري الذي تنجزه القوى المطبقة على مختلف نقاط الجسم خلال فترة زمنية قصيرة  $dt$  التي تراقبها تغيرات  $d\vec{r}_i$  في مواضع نقاط الجسم هذا العمل يمتلئ بالعلاقة :

$$dW = \vec{\Lambda} \cdot \vec{\omega} dt = \vec{\Lambda} \cdot d\vec{\theta} \quad (20)$$

حيث :

$$\vec{\omega} = d\vec{\theta} / dt$$

البرهان : يمكن كتابة العمل المنجز على الشكل :

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i dW_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt \\ &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

ومن خواص الجداء المختلط للأشعة نجد :

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) dt = \sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{\Lambda}_i dt \\ &= \sum_i \omega \Lambda_i dt = \omega \Lambda dt = \Lambda d\Theta \end{aligned}$$

وهي العلاقة ( 20 ) المطلوبة .

ويجدر أن نلاحظ أن الاستطاعة عندئذ هي :

$$P = dW / dt = \Lambda \omega$$

ز — نظرية العمل الكلي :

إن العمل الكلي الذي تنجزه القوى المؤثرة على الجسم الدائر حول محورين وضمنين مختلفين يعطى بالعلاقة :

$$W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 \quad (24)$$

حيث  $\omega_1$  ،  $\omega_2$  قيمتا السرعة الزاوية في الوضعين الأول (  $t_1$  ،  $\Theta_1$  )  
والأخير (  $t_2$  ،  $\Theta_2$  ) .

البرهان : نحصل على العمل الكلي بتكامل العمل العنصري المعطى بالعلاقة  
( 20 ) وذلك بين الوضعين المختلفين إذن :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \Lambda \, d\Theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} I \omega \, d\Theta = \int_{t_1}^{t_2} I \frac{d\omega}{dt} \, dt \quad (25) \\
 &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega \, d\omega = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2
 \end{aligned}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

ملاحظة : كان بإمكاننا أن نبرهن على صحة هذه النظرية بطريقة مباشرة تعتمد على أن العمل المنجز يساوي الفرق بين الطاقين الحركيتين أي :

$$W = T_2 - T_1$$

وفي حالة الدوران حول محور تأخذ  $T_2, T_1$  القيمتين  $\frac{1}{2} I \omega_1^2$  و  $\frac{1}{2} I \omega_2^2$  . وهذا يؤدي مباشرة الى العلاقة (24) المطلوبة .

### ح — نظرية انحفاظ الاندفاع الزاوي :

إذا كانت القوى المؤثرة على الجسم ممدومة فإن الاندفاع الزاوي محفوظ .  
البرهان : لما كان عزم القوى  $\vec{\Lambda}$  معدوماً في حالة القوى الممدومة ولما كانت :

$$\vec{\Lambda} = \frac{d}{dt} \vec{\Omega} \quad (28)$$

فاننا نستنتج ان  $d\vec{\Omega}/dt = 0$  ومنه :

$$\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_1 \quad (27)$$

أي ان الاندفاع الزاوي محفوظ .

### ط — نظرية الدفع الزاوي :

الدفع الزاوي الناتج عن القوى اثناء الدوران بين وضعين مختلفين للجسم يساوي

الفرق بين قيمتي الاندفاع الزاوي في الوضين اي :

$$\vec{J}_n = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \quad (28)$$

البرهان : يعرف الدفع الخطي بين لحظتين  $t_1$  ،  $t_2$  بأنه :

$$\vec{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

والدفع الزاوي بالملاقة :

$$\vec{J}_n = \int_{t_1}^{t_2} \vec{L} dt \quad (29)$$

وباستعمال العلاقة (26) نجد العلاقة (28) المطلوبة .

#### VI — تطبيق : دراسة النواس المركب :

يتألف النواس المركب من جسم مادي يدور حول محور ثابت . والفرق

بينه وبين النواس البسيط هو

اعتبار كل كتلة الجسم في

النواس البسيط متجمعة في

نقطة واحدة تبعد مسافة ثابتة

عن محور الدوران ، على

نقيض ما في النواس المركب

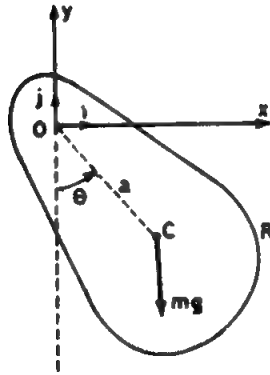
من اعتبار الكتلة موزعة في

الفراغ الذي يشغله الجسم

الصلب الدائر توزيعاً ثابتاً .

ولذلك فإن دراسة حركة

النواس المركب ما هي إلا دراسة حركة جسم صلب حول محور ثابت .



الشكل ( 5 )

ليكن اذن النواس المركب R المين في الشكل (5) والذي يدور حول المحور الأفقي o المتعامد مع الشكل . ولتكن C مركز ثقله المتين موضعه بالزاوية  $\theta$  في لحظة ما t ، علماً بأن بعده عن محور الدوران ثابت وليكن a . ان القوة الخارجية الوحيدة المؤثرة على النواس هي ثقله :

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg \vec{j} \quad (30)$$

لكتابة معادلة حركة النواس هذا يمكن اتباع احدى النظريات السابقة .

### ١ — طريقة اولى : ( نظرية انحفاظ الطاقة ) :

لما كانت القوة  $\vec{F}$  مشتقة من كون

$$V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int F dy = - mgy = - mga \cos \theta \quad (31)$$

فان من الممكن استخدام نظرية انحفاظ الطاقة الكلية اي :

$$T + V = E \quad \text{ثابت} \quad (32)$$

وهذه العلاقة تكتب بالشكل

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - mga \cos \theta = E \quad \text{ثابت} \quad (33)$$

ولما كانت  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  فيمكن اعادة كتابة العلاقة (33) على الشكل :

$$\theta'^2 - 2A^2 \cos \theta = \frac{2E}{I} \quad \text{و} \quad Mga / I = A^2 \quad (34)$$

حيث I عزم المطالة حول المحور o . وتمثل العلاقة الاخيرة معادلة حركة النواس المركب R حول المحور o . إلا انه لما كانت E ثابتة فبإمكاننا الحصول على علاقة مكافئة للعلاقة الاخيرة وذلك باشتقاقها بالنسبة للزمن .

$$\theta' \theta'' + A^2 \sin \theta \theta' = 0 \quad (35)$$

وبما ان  $\omega = \theta' \neq 0$  في حالة الحركة فالاختصار على  $\theta'$  ممكن وتأخذ معادلة الحركة الشكل :

$$\Theta'' + A^2 \sin \Theta = 0 \quad (36)$$

ب — طريقة ثانية : ( نظرية الاندفاع الزاوي ) :

لدينا في هذه الحالة العلاقات الاساسية التالية :

$$\vec{\Lambda} = d \vec{\Omega} / dt \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda} &= \vec{a} \wedge \vec{F} = (a \sin \Theta \vec{i} - a \cos \Theta \vec{j}) \wedge (-m g \vec{j}) \\ &= -m g a \sin \Theta \vec{k} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\vec{\Omega} = I \vec{\omega} = I \omega \vec{k} = I \Theta' \vec{k} \quad (39)$$

ونجد بدمج العلاقات الثلاث هذه معادلة الحركة مباشرة أي :

$$\Theta'' + (m g a / I) \sin \Theta = \Theta'' + A^2 \sin \Theta = 0 \quad (40)$$

وهي نفس العلاقة التي أوجدناها سابقاً والتي يؤدي حلها إلى معرفة الزاوية  $\Theta$  التي تعين وضع النواس بدلالة الزمن .

ح — دراسة حركة النواس المركب :

يمكن دراسة حركة النواس المركب من خلال إحدى معادلتيه التفاضليتين (34) و (36) . ولما كانت العلاقة الأولى منها تعطي السرعة الزاوية مباشرة فترى من الأفضل القيام بهذه الدراسة من هذه العلاقة . ففي العلاقة (34) تعين E من شروط البدء :

$$t = 0, \Theta = \Theta_0 = 0, \Theta' = \Theta'_0 = \omega_0 \quad (41)$$

ولقد اخترنا الوضع الابتدائي بحيث كان مركز الثقل على الشاقول تحت محور التعليق وذلك لتبسيط المعادلة والدراسة . فشرط البدء هذه تعني أن النواس كان في لحظة البدء في وضع التوازن المستقر  $\Theta = 0$  وأُعطي

سرعة ابتدائية  $\omega_0$  . وهذه الشروط كافية لتحديد E من العلاقة (34) نفسها حيث نجد :

$$2E/I = 2E_0/I = \omega_0^2 - 2A^2 \quad (42)$$

وبالتالي :

$$\Theta'^2 = 2A^2 \cos \Theta + 2E/I = \omega_0^2 - 2A^2 (1 - \cos \Theta)$$

أو :

$$\omega^2 = \Theta'^2 = \omega_0^2 - 4A^2 \sin^2 (\Theta/2) \quad (43)$$

تدل هذه العلاقة على أن السرعة الزاوية  $\omega$  تنعدم عندما  $\Theta = \alpha$  حيث

$$\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \omega_0^2 / 4A^2$$

أو :

$$\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \omega_0 / 2A \quad (44)$$

أي :

$$\alpha = \pm 2 \text{ Arc sin } (\omega_0 / 2A) \quad (45)$$

فالزاوية  $\Theta$  إذاً تتأرجح بين  $+\alpha$  و  $-\alpha$  والحركة عندئذ حركة اهتزازية . ولكن لما كانت  $\sin^2(\alpha/2) \leq 1$  فان شرط امكان انعدام السرعة الزاوية هو :

$$\omega_0^2 / 4A^2 \leq 1$$

أو :

$$\omega_0 \leq 2A \quad (46)$$

فإذا تحققت هذه المتراجحة كانت الحركة اهتزازية كما سبق ، وإلا فالسرعة



الزاوية لا تنعدم والحركة مستمرة في اتجاه واحد يحدده اتجاه السرعة الزاوية الابتدائية  $\omega_0$ .

#### د — حالة الاهتزازات صغيرة السعة :

في الحالة الخاصة عندما تكون الاهتزازات صغيرة السعة يمكن أن نستطيع عن  $\sin \theta$  بالزاوية  $\theta$  نفسها فتأخذ معادلة حركة النواس المركب الشكل البسيط

$$\theta'' + A^2 \theta = 0 \quad (47)$$

ويعطي حلها الزاوية  $\theta$  بدلالة الزمن أي :

$$\theta = C \sin (At + d) \quad (48)$$

حيث يتعين ثابتا التكامل من شروط البدء . ففي حالة الشروط المطاة بالملاقات (41) نجد

$$C = A / \omega_0 = (1 / \omega_0) \sqrt{mg a / I} \quad (49)$$

نلاحظ أن الحركة دورية - كما تبين العلاقة (48) - وأن دورها  $p$  يجب أن يحقق العلاقة

$$A p = 2\pi$$

أي :

$$p = 2\pi / A = 2\pi \sqrt{I / mga} \quad (50)$$

#### ه — النواس البسيط المكافئ للنواس المركب :

النواس البسيط الذي يكافئ النواس المركب هو الذي تتجمع كتلته في نقطة واحدة ويكون طوله  $L$  (بمد الكتلة عن مركز التعليق) بحيث يكون دوره مساوياً دور النواس المركب . ومن السهل أن نستنتج معادلة النواس البسيط

من معادلة النواس المركب بملاحظة ان الفرق بينها هو في عزم المطالة فقط .  
 فزعم المطالة للنواس البسيط هو  $I = ML^2$  والمعادلة العامة للنواس البسيط  
 عندئذ تأخذ الشكل :

$$\Theta'' + B^2 \sin \Theta = 0 \quad B^2 = g/L \quad (51)$$

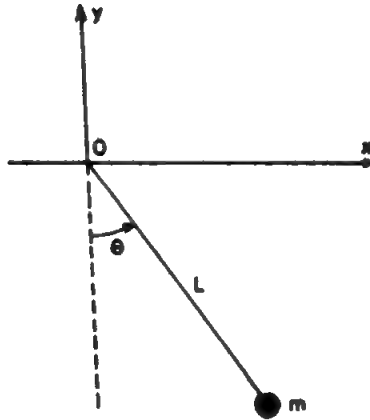
وحتى يتكافأ النواسان تماماً يجب أن يكون :

$$A^2 = B^2 \quad \text{أو} \quad mag / I = g / L$$

فلن المادتين (36) و(51) . ومنه

$$L = \frac{I}{ma} = \frac{mK^2}{ma} = \frac{K^2}{a} \quad (52)$$

حيث  $K$  نصف قطر عطالة النواس المركب حول محور تعليقه .



الشكل ( 6 )

إذن فالنواس البسيط المكافئ للنواس المركب الذي بعد مركز ثقله عن

محور التعليق  $a$  وكتلته  $m$  وعزم عطالته  $I$  ونصف قطر عطالته حول هذا المحور  $K$  بتصف بأن كتلته هي  $m$  نفس كتلة النواس المركب وبأن طوله ممطى بالملاقة (52).

### و — النواس المركب ذو الدور الأصغري

يكون الدور :

$$P = 2\pi \sqrt{I / mga}$$

لنواس المركب اصغريا عندما ينعدم مشتقه بالنسبة لـ  $a$  ، على اعتبار ان البعد  $a$  يمكن تغييره . ولما كان حسب نظرية المحاور المتعامدة

$$I = I_c + ma^2 = mK_c^2 + ma^2$$

حيث  $I_c$  عزم العطالة حول محور مار من مركز الثقل ويوازي محور التعليق ، فان الدور يكتب بالشكل :

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{a + K_c^2/a} \quad (53)$$

وينعدم مشتقه عندما يكون

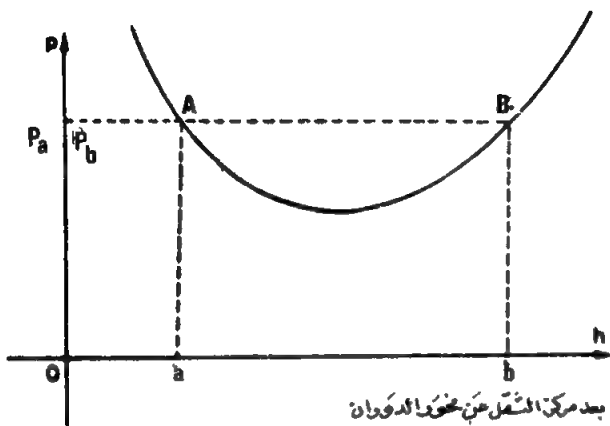
$$1 - \frac{K_c^2}{a^2} = 0$$

أي عندما  $a = K_c$  وقيمة الدور الأصغري بالتعويض هي :

$$P_m = 2\pi \sqrt{2K_c / g} \quad (54)$$

### ز — النواس العكوس :

بما أن دور النواس المركب يأخذ قيمة صفري عندما  $a = K_c$  فان تغييره بدلالة  $a$  هو كما يبين الشكل (7) . وهذا يعني أن الدور يأخذ قيمتين متساويتين من أجل بعدين مختلفين لمركز الثقل عن محور التعليق ، مثل



الشكل (7)

a ، b كما في الشكل ( 7 ) . والملاقة التي تربط هذين البعدين a ، b تنتج مباشرة من تساوي الدورين المقابلين لها أي :

$$P_a = \frac{2 \pi}{\sqrt{g}} \sqrt{a + K_c^2 / a}$$

$$P_b = \frac{2 \pi}{\sqrt{g}} \sqrt{b + K_c^2 / b}$$

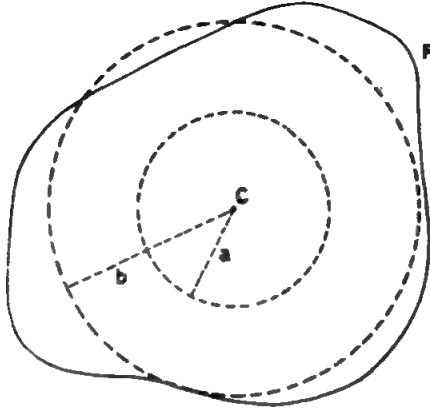
والمساواة بينها تعطي :

$$a + K_c^2 / a = b + K_c^2 / b$$

أو :

$$a.b = K_c^2 \quad (55)$$

فإذا علق النواس على بمدين  $a$  ،  $b$  مرتبطين بالملاقة (55) كان له نفس



الشكل (8)

الدور في الحالتين . النواس الذي يحقق هذا الشرط يسمى بالنواس العكوس . ويجدر بالذكر ان محور التعليق يمر من إحدى الدائرتين اللتين مركزاهما في مركز الثقل C ونصفا قطريهما هما  $a$  ،  $b$  المرتبطين بالملاقة (55) كما بين الشكل (8) .

## VII — الحركة المستوية العامة للجسم الصلب :

يمكن أن تعتبر الحركة العامة المستوية للجسم الصلب كمجموع حركتين احدهما انسحابية والأخرى دورانية حول محور مناسب متعامد مع مستوى الحركة . وليس من الضروري اخذ محور الدوران ماراً من مركز الثقل وانما في كثير من الحالات يفضل مثل هذا الاعتبار . ان النظريات العامة السابقة في هذا البحث تنطبق على الحركة المستوية العامة للجسم الصلب. ويضاف مبدأ الاندفاع الخطي للجزء الانسحابي من الحركة ويتلخص هذا المبدأ في العلاقة

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_c = \vec{F} \quad (56)$$

الذي وجدناه في السابق عندما درسنا مجموعة نقاط مادية ، حيث  $m$  الكتلة الكلية للجسم و  $\vec{F}$  القوة الخارجية المؤثرة عليه و  $\vec{a}_c$  تسارع مركز ثقل الجسم . ويجب الا يغيب عن الذهن أن أم العلاقات المستخدمة في دراسة حركة الجسم الصلب هي العلاقة (56) والعلاقتان :

$$\vec{A}_c = \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_c = I_c \vec{\omega} \quad (57)$$

$$T + V = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + V = E \quad (\text{ثابت}) \quad (58)$$

حيث ترمز  $c$  لمركز الثقل . وقد سبق أن استخرجنا هاتين المادتين بصورة عامة . التطبيق التالي يوضح ما تقدم .

### VIII - تطبيق : حركة اسطوانة دائرية على مستوى مائل :

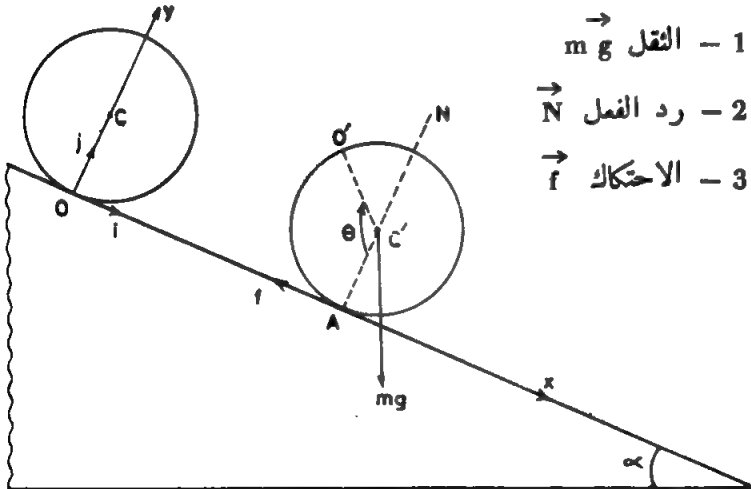
تدحرج اسطوانة صماء نصف قطرها  $a$  باحتكاك وبدون انزلاق على مستوى مائل ، زاوية ميله على الافق  $\alpha$  . المطلوب دراسة حركة هذه الاسطوانة .

يمثل الشكل (9) وضي الاسطوانة في لحظة البدء ولحظة ما  $t$  . وقد اخيرت جملة المقارنة المطالية المستوية بحيث أن  $ox$  ينطبق على خط الميل الاعظم للمستوى المائل و  $oy$  يتعامد عليه في مستوى الحركة الشاقولي . القوى المؤثرة على الجسم ( الاسطوانة ) هي :

1 - الثقل  $m \vec{g}$

2 - رد الفعل  $\vec{N}$

3 - الاحتكاك  $\vec{f}$



الشكل (9)

إن تطبيق الملاحظين (56) و (57) يعطي :

$$\vec{mR}_c = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{f} \quad (59)$$

$$\vec{\Lambda}_c = \vec{CA} \wedge \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{\Omega} = I_c \frac{d}{dt} \vec{\omega} \quad (60)$$

ولكن الشكل يشير إلى أن

$$\vec{g} = g \sin a \vec{i} - g \cos a \vec{j} \quad (61)$$

$$\vec{N} = mg \cos a \vec{j} \quad (62)$$

$$\vec{f} = - f \vec{i} \quad (63)$$

$$\vec{CA} = - a \vec{j} \quad (64)$$

$$I_c = \frac{1}{2} m a^2 \quad (65)$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \Theta' \vec{k} \quad (66)$$

وبالتعويض في الملاحظين (59) ، (60) نجد :

$$m R_c = (mg \sin a - f) i \quad (67)$$

$$\Theta'' = 2 f / ma \quad (68)$$

هاتان الملاحظتان الأخيرتان تعطيان تسارع مركز الثقل ( أي نمين الحركة الانسحابية ) والتسارع الزاوي ( أي نمين الحركة الدورانية ) .

إلا أنه هناك علاقة بين التسارع الزاوي والتسارع الانسحابي ( تسارع مركز الثقل ) . وتنتج هذه العلاقة من ملاحظة أن الاسطوانة تتدحرج بدون انزلاق مما يجعل المسافة التي ينتقلها مركز الثقل تساوي طول القوس الذي تتدحرجه الاسطوانة . أي

$$\overline{OA} = \widehat{OA} \quad (69)$$

حيث  $O'$  هي النقطة من محيط الاسطوانة التي كانت في  $O$  في لحظة البدء .

وبالتالي :

$$\theta = \widehat{O'A} / a = x / a \quad \text{أو} \quad \theta' = x' / a \quad (70)$$

وبتركيب المعادلتين (68) ، (70) ينتج :

$$f = \frac{1}{3} m x'' \quad (71)$$

وبإسقاط العلاقة (67) نجد :

$$m x'' = m g \sin \alpha - f \quad \text{و} \quad m y'' = 0$$

أو :

$$x'' = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad \text{و} \quad y'' = 0 \quad (72)$$

وإذا فرضنا أن شروط البدء هي

$$t = 0 \text{ و } x_0 = 0 \text{ و } y_0 = a \text{ و } x'_0 = 0 \text{ و } y'_0 = 0 \quad (73)$$

فاننا نجد :

$$x = \left( \frac{1}{3} g \sin \alpha \right) t^2 \quad \text{و} \quad y = a \quad (74)$$

فالحركة الانسحابية متسارعة بانتظام على المستوى المائل . والحركة الدورانية هي أيضاً متسارعة بانتظام لأن :

$$\theta' = \frac{x''}{a} = \frac{2}{3a} g \sin \alpha \quad \text{أو} \quad \theta = \left( \frac{1}{3} \frac{g}{a} \sin \alpha \right) t^2 \quad (75)$$

هذا ويمكن حساب عامل الاحتكاك

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{m x'' / 2}{m g \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \quad (76)$$

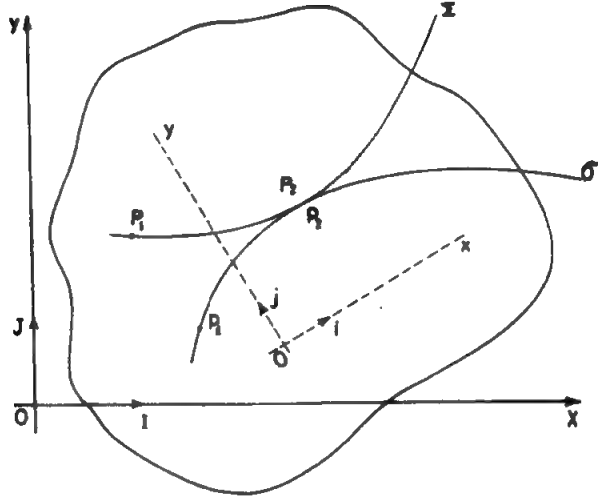
نلاحظ أنه حتى تتم الحركة بدون انزلاق يجب أن يكون عامل الاحتكاك مساوياً على الأقل للقيمة السابقة . أي أن شرط عدم الانزلاق هو

$$\mu \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \quad (77)$$



## IX — المركز الآني للدوران • المحور الآني للدوران :

ليكن الجسم الصلب  $R$  المتحرك حركة مستوية موازية للمستوى الثابت  $OXY$  كما في الشكل (10). ولتكن  $oxy$  جملة محاور متماسكة مع الجسم المتحرك. عندما يتحرك الجسم لا بد أن تكون هناك نقطة ثابتة يدور الجسم حولها



الشكل (10)

في أية لحظة من الزمن . وهذه النقطة قد لا تكون نقطة من الجسم وهي نقطة من الجملة المتحركة على أي حال . وهذه النقطة التي تسمى بالمركز الآني للدوران تكون ثابتة آنياً في اللحظة  $t$  بالنسبة للجملة  $OXY$  . وبمرور اللحظة الزمنية  $t$  تتغير هذه النقطة في كل من الجملتين  $OXY$  و  $oxy$  . ففي اللحظة  $t_1$  مثلاً لتكن  $p_1$  من الجملة المتحركة مركزاً آنياً للدوران أي ساكنة في الجملة الثابتة  $OXY$  . ولتكن  $P_1$  موضعها في الجملة الأخيرة . وفي لحظة  $t_2$  لاحقة يكون الجسم دائراً حول نقطة أخرى  $p_2$  موضعها  $P_2$  في الجملة الثابتة . فالمركز الآني للدوران تغير إذن في كل من الجملتين الثابتة والمتحركة .

ولذا يمكننا القول بأن المركز الآني للدوران يرسم منحنيًا في كل من  
الجلتين . ويكون المنحنيان مشتركين في نقطة واحدة في أية لحظة  $t$  .  
يفيد ذلك أن المنحني الذي يرسمه المركز الآني للدوران في الجملة المتحركة  
المتناسكة مع الجسم يمر بالمنحني الذي يرسمه المركز الآني في الجملة الثابتة ،  
أي أن الأول يتدرج على الثاني . نسمي الأول بالمنحني الجسمي المركز  
الآني للدوران أو المتدرج بينما نسمي الثاني بالمنحني الفراغي لهذا المركز  
أو القاعدة . كما نسمي المحور المتعامد مع مستوى الحركة والذي يمر من  
المركز الآني للدوران بالمحور الآني للدوران .

عندما تكون حركة الجسم حركة دورانية صرفة حول محور ثابت يكون  
المركز الآني للدوران ثابتًا في كلتا الجلتين وهو مركز الدوران . أما المحور الآني  
فهو محور الدوران نفسه . أما في الحالة التي تكون فيها حركة الجسم انسيابية  
فقط فيمكن اعتبار هذه الحركة دورانية حول مركز في اللانهاية وبالتالي  
فالمركز الآني للدوران واقع في اللانهاية .

لتعيين المنحني الفراغي للمركز الآني للدوران «القاعدة» نعتبر النقطة  $P$  المتحركة  
في كل من الجلتين الجسمية  $oxy$  والفراغية  $OXY$  كما في الشكل (11) .  
إن السرعة المطلقة للنقطة  $P$  ( أي في الجملة  $OXY$  ) تعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned}\vec{D_1P} &= D_1 ( \vec{R} + \vec{r} ) \\ &= D_1 \vec{R} + D_1 \vec{r}\end{aligned}$$

ولكن :

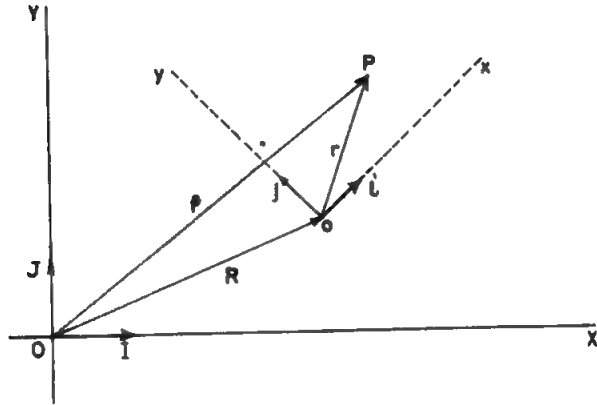
$$\vec{D_1r} = \vec{D_Nr} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

إذن :

$$\vec{D_1P} = D_1 \vec{R} + \vec{D_Nr} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (78)$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

حيث  $\vec{v}$  سرعة P المطلقة في الجلة OXY و  $\vec{u}$  سرعة مبدأ الجلة المتحركة oxy . لنعتبر الآن أن P هي المركز الآتي للدوران . فهي إذن في اللحظة المتبرة t نقطة ساكنة في كل من الجلتين أي  $\vec{v} = 0$  ،  
 $\cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$



الشكل (11)

إذن :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge (\vec{e} - \vec{R}) = -\vec{u} \quad (79)$$

وبضرب طرفي (79) خارجياً بـ  $\vec{\omega}$  نجد :

$$\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{e} - \vec{R})] = -\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

أو :

$$\vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot (\vec{e} - \vec{R})] - (\vec{e} - \vec{R}) (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

الحـد الأول من الطرف الـايسـر مـعـدوم لـتـعـامـد  $\vec{\omega}$  مـع  $(\vec{\rho} - \vec{R})$   
إذن :

$$\omega^2 (\vec{\rho} - \vec{R}) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

ومنه :

$$\vec{\rho} = \vec{R} + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{u}}{\omega^2} = \vec{R} + \frac{\vec{\omega} \wedge d\vec{R}/dt}{\omega^2} \quad (80)$$

فاذا اخـتـيرت  $o$  مـنـطـبـقـة عـلى مـرـكـز الثـقـل  $C$  كـان :

$$\vec{\rho} = \vec{R}_c + \frac{\vec{\omega} \wedge d\vec{R}_c/dt}{\omega^2} \quad (81)$$

حيث تـمـيـن  $\vec{R}_c$  و  $d\vec{R}_c/dt$  مـن الحـركـة الانـسـحـابـية لـمـرـكـز الثـقـل  
وفق المـلـاقـة :

$$m d^2 \vec{R}_c / dt^2 = \vec{F} \quad (82)$$

فـالـمـلـاقـة (81) تـمـيـن لـنا اذن المـنـحـنى الفـراغـي لـلـمـرـكـز الآني لـلـدورـان .

X — تطبيق على تـدحرج اسـطـوانـة عـلى مـسـتـو مـائـل :

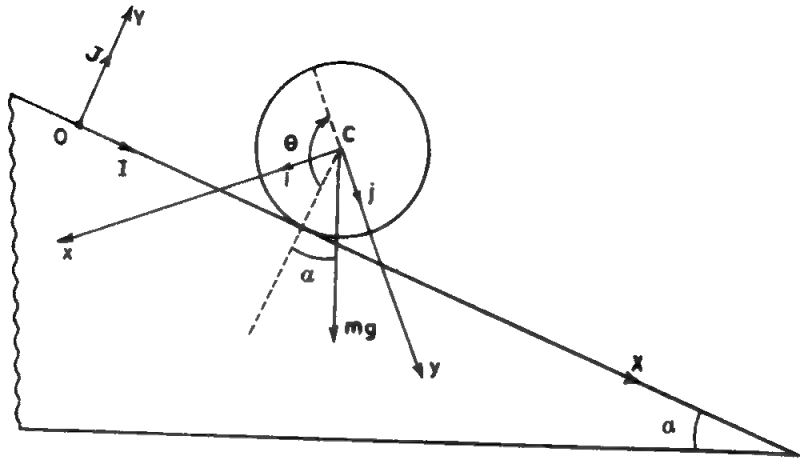
لنـدرس التـطـيـق السـابـق الـوارـد فـي الفـقـرة VIII بـالـاسـتـناد إـلى المـرـكـز الآني  
لـلـدورـان . يـتـمـيـن المـرـكـز الآني لـلـدورـان بـالـمـلـاقـة :

$$\vec{\rho} = \vec{R}_c + \frac{\vec{\omega} \wedge d\vec{R}_c/dt}{\omega^2}$$

$$\vec{\rho} = \vec{R} + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{u}_c}{\omega^2}$$

$$= \vec{R} - \frac{\omega \vec{u}_c}{\omega^2} \vec{J}$$

$$= \vec{R}_c - \frac{\vec{u}_c}{\omega} \vec{J}$$



شكل (12)

وبالاسقاط على المحورين  $ox$  و  $oy$  نجد :

$$x_p = x_c \text{ و } y_p = y_c - u_c / \omega = a - u_c / \omega \quad (83)$$

هاتان المعادلتان تعينان المنحنى الفراغي للمركز الآني للدوران . ونلاحظ أن المركز الآني للدوران واقع على مستقيم يوازي  $OY$  ويمر من  $C$  ، كما تبين العلاقة الاولى من (83) ، وأنه يبعد عن  $OX$  مسافة  $a - u_c / \omega$  .

في الحالة الخاصة عندما لا يوجد انزلاق تكون سرعة مركز الثقل  $u_c = a \omega$  وتصبح معادلات المركز الآني للدوران :

$$x_p = x_c \text{ و } y_p = 0$$

وهذا يدل على أن نقطة تماس الاسطوانة مع المستوى المائل هي المركز الآني للدوران ، وأن المحور الآني للدوران هو مولد الاسطوانة الواقع في المستوى المائل .

نلاحظ من (83) أن المركز الآني للدوران في جملة الجسم يبعد مسافة  $u_c / \omega$  عن مركز الثقل C ، فالمتحني الجسمي المركز الآني للدوران هو دائرة مركزها C ونصف قطرها  $b = u_c / \omega$  . وفي الحالة الخاصة عندما لا يوجد انزلاق يصبح نصف القطر :

$$b = u_c / \omega = a \omega / \omega = a$$

ويكون المتحني الجسمي للمركز الآني للدوران محيط الاسطوانة .  
والآن يمكن تطبيق نظرية الزخم الزاوي  $\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega} / dt$  للدوران حول P وذلك في حالة عدم وجود انزلاق .

$$\vec{\Lambda} = (-a \vec{j}) \wedge (mg \sin \alpha \vec{i}) = mg a \sin \alpha \vec{k} \quad (85)$$

$$\vec{\Omega}_p = I_p \vec{\omega} = (I_c + m a^2) \Theta' \vec{k} = \frac{3}{2} m a^2 \Theta' \vec{k}$$

$$d\vec{\Omega}_p / dt = \frac{3}{2} m a^2 \Theta'' \vec{k} \quad (86)$$

ومنه :

$$mg a \sin \alpha = \frac{3}{2} m a^2 \Theta''$$

أو :

$$\Theta'' = \frac{2g}{3a} \sin \alpha \quad (87)$$

ولعدم وجود انزلاق يكون :

$$x = x_c = x_p = a\Theta$$

وهذا ما يؤدي إلى :

$$x'' = a \Theta'' = \frac{2g}{3} \sin \alpha \quad (88)$$

وهكذا فإن الملاقة (87) تعطينا نفس التسارع الزاوي الذي وجدناه في الدراسة الأولى . انظر الملاقة (75) . كما ان الملاقة (88) تعطينا نفس التسارع الخطي الذي حصلنا عليه في الملاقة (72) . اذن فالطريقتان متكافئتان تمام التكافؤ من حيث دراسة الحركة .

## XI — توازن الجسم الصلب :

لما كان التوازن حالة خاصة من الحركة فان الجسم الصلب يكون متوازناً إذا كان لا ينسحب ولا يدور وهذا يعود إلى الشرطين :

$$\vec{F} = 0 \quad , \quad \vec{A} = 0$$

اي ان محصلة القوى المؤثرة الخارجية في الجسم معدومة والعزم الحاصل لهذه القوى معدوم أيضاً .

ويجدر أن نلاحظ أن مبدأ العمل الافتراضي ومبدأ دالمبرت المشتقين من أجل مجموعة من النقاط المادية ينطبقان هنا لأن الجسم الصلب حالة خاصة لمجموعة النقاط المادية . وفي الحالة التي تكون فيها القوى الخارجية  $\vec{F}$  مشتقة من كمون :

$$V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{أو} \quad \vec{F} = - \vec{\nabla} V$$

فشرط التوازن يكون :

$$\vec{\nabla} V = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

وإن التوازن مستقر إذا كان الكون في نهاية صغرى وغير مستقر إذا كان في نهاية عظمى ، كما رأينا في السابق .

فالشرط اللازم والكافي لتوازن الجسم هو انعدام القوى ( أي انعدام مشتقات الطاقة الكامنة ) وان يكون الجسم بالأصل بدون حركة : أما

الشرط اللازم والكافي لاستقرار التوازن فهو عندئذ كون الكون أصغرياً.

## XII — تطبيق :

يقف رجل وزنه  $W_m$  على رأس سلم طوله  $L$  وزنه  $W$  ويستند الى الجدار بدون احتكاك والى الارض باحتكاك  $\mu$  . بين أن شرط التوازن هو

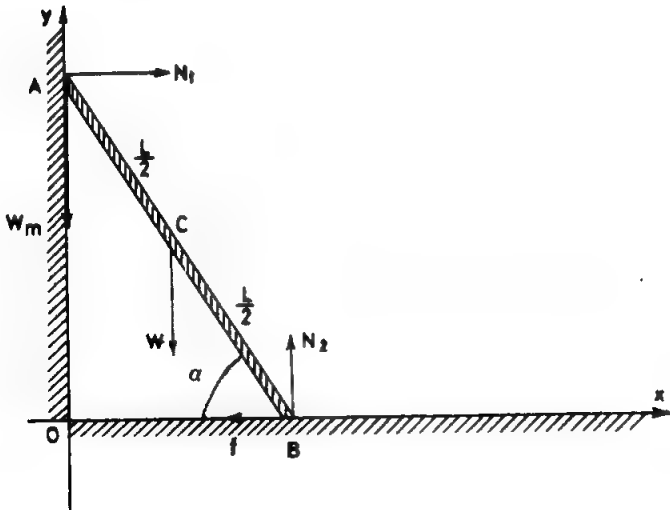
$$\mu \geq \frac{W_m + W/2}{W_m + W} \operatorname{ctg} \alpha$$

حيث  $\alpha$  زاويته مع الأرض .

شرطا التوازن هما انعدام محصلة القوى المؤثرة وانعدام محصلة العزوم لهذه القوى حول نقطة ما وليكن A مثلاً . اذن :

$$\vec{F} = \vec{W} + \vec{W}_m + \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$$

$$\vec{A} = \vec{AC} \wedge \vec{W} + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AB} \wedge \vec{N}_2 = 0$$



الشكل (13)



وباسقاط هاتين الملتين على  $ox$  ,  $oy$  نحصل على اربع علاقات حلها يعطى :

$$F = N_1 = (W_m + W/2) \operatorname{ctg} \alpha$$

$$N_2 = W_m + W$$

( على الطالب أن يتم العمليات الجبرية بنفسه ) .

فاذا حصل التوازن كان  $F = \mu N_2$  أو :

$$\mu = \frac{F}{N_2} = \frac{W_m + W/2}{W_m + W} \operatorname{ctg} \alpha$$

ومن الواضح أنه اذا كانت قيمة عامل الاحتكاك أكبر من هذه القيمة فان التوازن يبقى محققاً الا أنه ينعدم من أجل قيم أصغر منها ولذلك فالتوازن يتحقق اذا كان :

$$\mu \geq \frac{W_m + W/2}{W_m + W} \operatorname{ctg} \alpha$$

★ ★ ★



## الفصل الحادي عشر

### الحركة الفراغية للجسم الصلب

- الاندفاع الزاوي للحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة
- الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب حول نقطة
- محاور العطالة الرئيسية
- الاندفاع الزاوي حول محاور العطالة الرئيسية
- الطاقة الحركية حول محاور العطالة الرئيسية
- نظرية الاندفاع الزاوي ومعادلات أولير للحركة
- المستقيم والمستوي اللامتحولان في حالة انعدام العزم الحاصل
- حركة الجسم المتناظر ، المخروط الجسمي والمخروط الفراغي
- تطبيق : حركة الأرض
- زوايا أولير
- تعيين مركبات شعاع الدوران بدلالة زوايا أولير
- دراسة الحركة بدلالة زوايا أولير
- حركة الدوامة الجيروسكوبية
- تفسير الحركة الجيروسكوبية للدوامة
- الجيروسكوب

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة  
مكتبتي الخاصة  
على موقع ارشيف الانترنت  
الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

لقد درسنا الحركة المستوية للجسم الصلب بشيء من التفصيل ، ورأينا ان هذه الحركة مؤلفة من مجموع حركتين : حركة انسحابية مستوية لنقطة منه وحركة دورانية حول محور مار من تلك النقطة ناظماً على مستو ثابت . ولقد رأينا أيضاً انه من المفيد في كثير من الأحيان أن تتمين الحركة الانسحابية لمركز الثقل وان تعتبر بمد ذلك الحركة الدورانية حول محور مار من مركز الثقل .

أما الحركة العامة الفراغية للجسم الصلب ، وهي موضوع هذا الفصل فانها تتركب بصورة عامة من حركتين الأولى انسحابية في الفراغ لنقطة من الجسم والثانية حركة دورانية حول محور مار من تلك النقطة وله منحى متغير مع الزمن . وفي العبارة الأخيرة يكمن الفرق بين الحركتين الدورانيتين المستوية والفراغية . في حين كانت درجات الحرية ثلاثاً بالنسبة للحركة المستوية للجسم الصلب نجد هنا ان درجات الحرية تصبح ستاً . ثلاث منها تتمين الحركة الانسحابية الفراغية والثلاث الأخرى لتتمين الحركة الدورانية لأن تتمين محاور الدوران يتطلب متحولين مستقلين وتتمين وضع الجسم للدائر حول هذا المحور يتطلب متحولاً مستقلاً واحداً .

ورأينا فيما سبق ان مركز ثقل جملة ميكانيكية متحركة يتحرك وكأنه خاضع لجميع القوى التي تؤثر على مختلف نقاط الجملة . فحركة مركز الثقل هي حركة انسحابية تتمين بالملاقة :

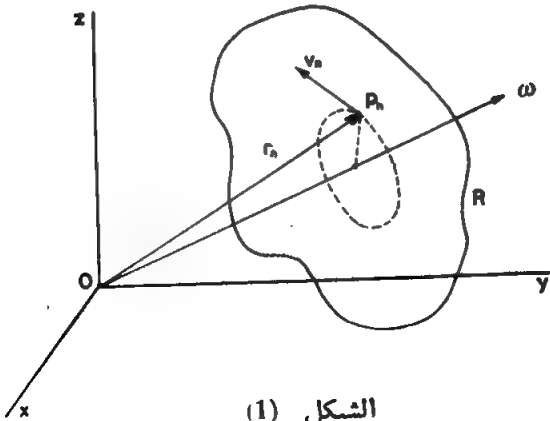
$$\vec{M} \vec{r}_c'' = \vec{F} \quad (1)$$

حيث  $\vec{r}_c$  تسارع مركز ثقل الجلبة و  $M$  الكتلة الكلية للجلبة المتحركة و  $\vec{F}$  محصلة جميع القوى المؤثرة في نقاط المجموعة . إذن فالحركة الانسحابية للجسم الصلب ترد إلى حركة نقطة واحدة . وقد أتينا على دراسة هذه الحركة بالتفصيل في فصول سابقة . ولذلك سنخصص هذا الفصل للدراسة التفصيلية للحركة الدورانية حول محور متغير مار من نقطة معينة . وسنسمي هذه الحركة اختصاراً بالحركة الدورانية حول نقطة .

### I - الاندفاع الزاوي للحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة :

لتكن  $O$  نقطة ثابتة من الجسم الصلب المتحرك  $R$  . ولنعتبر دوران هذا الجسم حول هذه النقطة . ففي أية لحظة زمنية  $t$  يكون الجسم دائراً حول محور مار من  $O$  بسرعة زاوية  $\vec{\omega}$  . ويجب التذكر أن هذا المحور ليس ثابتاً وإنما يتغير من لحظة إلى أخرى ، إلا أنه يبقى ماراً من  $O$  . إذا كانت  $P_n$  نقطة ما من الجسم فإن لها في اللحظة  $t$  سرعة آنية  $\vec{v}_n$  تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}_n = \vec{r}'_n = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_n \quad (2)$$



الشكل (1)

والاندفاع الزاوي لتلك النقطة يعطى عندئذ وكما رأينا سابقاً بالعلاقة :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_n &= m_n (\vec{r}_n \wedge \vec{r}'_n) \\ &= m_n [\vec{r}_n \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_n)]\end{aligned}\quad (3)$$

حيث  $m_n$  كتلة النقطة  $P_n$  . والاندفاع للزاوي الكلي للجسم ينتج من اعتبار حركة جميع نقاط الجسم . إذن :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \sum_n \vec{\Omega}_n = \sum_n m_n [\vec{r}_n \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_n)] \\ \vec{\Omega} &= \sum_n m_n [(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n) \vec{r}_n]\end{aligned}\quad (4)$$

حيث استعملنا خاصية جداء الأشعة :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (5)$$

سنكتب  $\vec{\omega}$  و  $\vec{r}_n$  و  $\vec{\Omega}$  بدلالة مركباتها على المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$

بالأشكال التالية :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (6)$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k} \quad (7)$$

$$\vec{r}_n = x_n \vec{i} + y_n \vec{j} + z_n \vec{k} \quad (8)$$

فإذا استعملنا العلاقات (6) ، (7) ، (8) في العلاقة (4) ثم طابقنا

أمثال أشعة الواحدة  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  في طرفي العلاقة الناتجة حصلنا عندئذ على العلاقات التالية :

$$\Omega_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \quad (9)$$

$$\Omega_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \quad (10)$$

$$\Omega_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \quad (11)$$

حيث  $I_{xx}$  و  $I_{yy}$  و  $I_{zz}$  هي عزوم العطالة حول المحاور  $ox$  و  $oy$  و  $oz$  بالترتيب وحيث  $I_{xy}$  و  $I_{yz}$  و  $I_{zx}$  هي مضارب العطالة . راجع بحث عزوم العطالة .

يمكن دمج العلاقات (9) و (10) و (11) في علاقة واحدة باستعمال خواص المصفوفات . والعلاقة الناتجة هي :

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

حيث مثلنا كلا من الشعاعين  $\vec{\Omega}$  و  $\vec{\omega}$  بمصفوفة عمودية حدودها مركبات الشعاع نفسه على المحاور الاحداثية . ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل المختصر :

$$\vec{\Omega} = (I) \vec{\omega} \quad (13)$$

حيث تمثل ( I ) مصفوفة العطالة . ونلاحظ أن هذا الشكل للاندفاع الزاوي يشبه ما حصلنا عليه في الحركة المستوية للجسم الصلب في الفصل السابق . يجدر بنا أن نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{\Omega}$  و  $\vec{\omega}$  يمكن أن يمثل بمصفوفتين سطريتين وعندئذ يجب ان نبادل موضعي الشعاع  $\vec{\omega}$  والمصفوفة ( I ) في المالتين (12) و (13) .



إذا قارنا العلاقة (13) مع العلاقة (11) من الفصل السابق فانتا نجد ان هناك اختلافاً جوهرياً بين العلاقتين وهو أن I في العلاقة الثانية يمثل عزم العطالة حول محور الدوران وهو عدد سلمي بينما تمثل ( I ) في العلاقة (13) مصفوفة العطالة لا عزم العطالة . ثم ان الاندفاع الزاوي في العلاقة (11) من الفصل السابق محمول على  $\vec{\omega}$  في حين انه ليس كذلك في العلاقة (13) . ( ينصح الطالب بمراجعة بحث المصفوفات في الرياضيات ) .

## II — الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب حول نقطة :

رأينا سابقاً ان الطاقة الحركية لجملة ما تساوي مجموع الطاقات الحركية لجميع نقاطها . اذن :

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_n \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_n) \cdot \vec{v}_n \\
 &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_n m_n \vec{r}_n \wedge \vec{v}_n \\
 &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}
 \end{aligned} \tag{14}$$

وهذه العلاقة تمثل أحد أشكال الطاقة الحركية الدورانية . وتتبع صيغة ثانية بالاستعاضة عن  $\vec{\Omega}$  بما يساويها من العلاقة (13) حيث نجد :

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I) \vec{\omega} \tag{15}$$

ويمجدر بنا ان نشير الى ان العمليات الجبرية والشعاعية التي يشتمل عليها ضمنا الطرف الايمن من هذه العلاقة يجب أن تجري بالترتيب وليست تبديلة .

والشكل الثالث لهذه الطاقة ينتج مباشرة بانجاز العمليات الجبرية في العلاقة الأخيرة ونجد :

$$T = \frac{1}{2} [ I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2 I_{xy} \omega_x \omega_y + 2 I_{yz} \omega_y \omega_z + 2 I_{zx} \omega_z \omega_x ] \quad (16)$$

وأخيراً إذا كانت  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  زوايا توجيه محور الدوران كان لدينا :

$$\omega_x = \omega \cos \alpha , \omega_y = \omega \cos \beta , \omega_z = \omega \cos \gamma \quad (17)$$

وتصبح T عندئذ بالتعويض :

$$T = \frac{1}{2} [ I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2 I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha ] \omega^2$$

ولكن التركيب الموجود ضمن المتضمنين هو عزم عطالة الجسم حول محور الدوران .

ولذلك :

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (18)$$

وهذه العلاقة تطابق ما وجدناه في الحركة الدورانية المستوية للجسم الصلب . ونشير بصورة خاصة إلى أن I هنا هي عزم العطالة حول محور الدوران ، وليس مصفوفة العطالة ، وأن عزم العطالة هذا متغير لتغير محور الدوران وليس ثابتاً كما في حالة الحركة المستوية . وهكذا مثلنا T بأربعة أشكال في العلاقات (14) و (15) و (16) و (18) وكلها متكافئة تمام التكافؤ .

### III — محاور العطالة الرئيسية :

لقد رأينا أن الاندفاع الزاوي للجسم الدائر يعطى بدلالة شعاع الدوران  $\rightarrow$  ومصفوفة العطالة ( I ) التي تتألف حدودها من عزوم العطالة حول

المحاور الاحداثية ومضارب العطالة حول تلك المحاور، كما أن  $\vec{\Omega}$  لا يوازي  $\vec{\omega}$  أو ليس محمولاً عليه بصورة عامة . وحساب الاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  يتطلب معرفة عزوم ومضارب العطالة على حد سواء . وسمياً وراء تبسيط حساب  $\vec{\Omega}$  سنحاول إيجاد ثلاثة محاور متعامدة ومتماسكة مع الجسم تكون مضارب العطالة حولها معدومة بحيث لا يبقى في مصفوفة العطالة ( I ) إلا حدود القطر الرئيسي لها فقط ، وبالتالي تنخفض كمية الحسابات كثيراً حيثما وجدت المصفوفة ( 1 ) . هذه المحاور الثلاثة التي نفقش عنها تسمى بمحاور العطالة الرئيسية للجسم وتعرف كما يلي : « محاور العطالة الرئيسية لجسم ما هي ثلاثة محاور متماسكة مع الجسم ومتعامدة فيما بينها ومضارب العطالة حولها معدومة » . وتميز هذه المحاور بالصفة التالية « إذا دار الجسم حول أحد محاور عطالته الرئيسية بسرعة دورانية  $\vec{\omega}$  فإن الاندفاع الزاوي عندئذ محمول على شعاع الدوران . وبشكل رياضي :

$$\vec{\Omega} = J \vec{\omega} \quad (19)$$

حيث J مقدار سلمي .

وفي الحقيقة إن مضموني ما جاء في التعريف وفي الخاصة السابقة متكافئان تمام التكافؤ وينتج أحدهما من الآخر . ولذلك يمكن اعتبار أحدهما كتعريف والآخر كصفة ناتجة عنه .

لايجاد المحاور الرئيسية نعتبر العلاقة (19) ونعوض فيها  $\vec{\omega}$  و  $\vec{\Omega}$  من العلاقات (6) و (7) و (9) و (10) و (11) بعد الاسقاط على المحاور ox و oy و oz فنجد :

$$\left. \begin{aligned} (I_{xx} - J) \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z &= 0 \\ I_{yx} \omega_x + (I_{yy} - J) \omega_y + I_{yz} \omega_z &= 0 \\ I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + (I_{zz} - J) \omega_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

→ هذه العلاقات الثلاث تعين  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  ، مركبات شعاع الدوران  $\omega$  حول المحور الرئيسي الذي يحقق الصفة الرئيسية المتمثلة بالعلاقة ( 19 ) . ولما كانت  $\vec{\omega}$  محمولة على محور الدوران ( وهو المحور الرئيسي في هذه الحالة ) فإن  $\vec{\omega}$  او مركباتها  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  تعين هذا المحور .

ان العلاقات الأخيرة تمثل ثلاث معادلات جبرية متجانسة ( : اوت طرف ثان ) وفيها ثلاثة متحولات . فحتى يكون لهذه المعادلات حل غير الصفر يجب أن يكون معين الأمثال فيها معدوماً أي :

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - J & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - J & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - J \end{vmatrix} = 0 \quad ( 21 )$$

أي أن الثابت  $J$  يجب أن يحقق هذه العلاقة التي هي من الدرجة الثالثة بالنسبة له ( أي بالنسبة لـ  $J$  ) . فهناك إذن ثلاث قيم لـ  $J$  وهي جذور هذه المعادلة ولتكن  $J_1$  و  $J_2$  و  $J_3$  .

بتعويض كل قيمة لـ  $J$  في العلاقات (20) نحصل على قيم  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  بشرط ان نختار احداها بشكل اختياري . إذن هناك ثلاثة محاور رئيسية  $D_1$  و  $D_2$  و  $D_3$  وأشعة الدوران حولها هي  $\omega_1$  و  $\omega_2$  و  $\omega_3$  تعطى بالعلاقات :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \omega_{x_1} \vec{i} + \omega_{y_1} \vec{j} + \omega_{z_1} \vec{k} \\ \vec{\omega}_2 &= \omega_{x_2} \vec{i} + \omega_{y_2} \vec{j} + \omega_{z_2} \vec{k} \\ \vec{\omega}_3 &= \omega_{x_3} \vec{i} + \omega_{y_3} \vec{j} + \omega_{z_3} \vec{k} \end{aligned} \quad (22)$$

المحاور  $D_1$  و  $D_2$  و  $D_3$  او  $\omega_1$  و  $\omega_2$  و  $\omega_3$  متعامدة فيما بينها . وصفة

التعامد هذه ناتجة عن كون هذه الأشعة الثلاثة حلولاً لنفس المجموعة من المعادلات وهي (20) . وينصح الطالب بمراجعة هذا الموضوع في الرياضيات ) .

هذا ويمكن البرهان على أنه إذا كان الجسم متناظراً فإن محور التناظر هو أحد المحاور الرئيسية وأن المحورين الرئيسيين الآخرين هما محوران يقطعانه في نقطة واحدة ويشكلان معه ثلاثية قائمة . والبرهان على ذلك ينتج مباشرة من حساب مضارب العطالة حول مثل هذه المحاور وبيان أنها معدومة .

وهذه الخاصة للجسم المتناظر ذات أهمية كبرى في كتابة معادلات الحركة . وسنرى ذلك فيما بعد .

#### IV — الاندفاع الزاوي حول محاور العطالة الرئيسية :

إذا كانت  $\vec{e}_1$  و  $\vec{e}_2$  و  $\vec{e}_3$  أشعة واحدة المحاور الرئيسية  $D_1$  و  $D_2$  و  $D_3$  فإن شعاع الدوران الكلي  $\vec{\omega}$  يكتب بدلالة مركباته على هذه المحاور بالشكل :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \quad (23)$$

ويكون الاندفاع الزاوي عندئذ حسب الخاصة (19)

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e}_1 + J_2 \omega_2 \vec{e}_2 + J_3 \omega_3 \vec{e}_3 \quad (24)$$

ومركباته على المحاور الرئيسية هي بالتالي :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= J_1 \omega_1 \\ \Omega_2 &= J_2 \omega_2 \\ \Omega_3 &= J_3 \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

وهذه العلاقات تختزل بملاقة واحدة باستعمال مفهوم المصفوفات أي :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

أو

$$\vec{\Omega} = (J) \vec{\omega} \quad (27)$$

والآن إذا قارنا الملاحظين (12) و (26) أو الملاحظين (13) و (27) نستنتج ان المصفوفة

$$(J) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

تمثل مصفوفة العطالة حول المحاور الرئيسية  $D_1$  و  $D_2$  و  $D_3$  . وهذه المصفوفة هي مصفوفة قطرية حدود قطرها الرئيسي يجب أن تكون عزوم العطالة حول هذه المحاور . أما حدودها المتبقية والتي تمثل مضارب العطالة حول تلك المحاور فمعدومة . وبذلك نكون قد برهنا الخاصة الأساسية التي وردت في تعريف المحاور الرئيسية .

### V — الطاقة الحركية حول محاور العطالة الرئيسية :

بعد ان عينا شمع الدوران وشمع الاندفاع الزاوي حول المحاور الرئيسية أصبح من السهل جداً حساب الطاقة الحركية .

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (J) \vec{\omega} \\ = \frac{1}{2} [J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2] \quad (29)$$

ولعل من المفيد ان نذكر القارئ من جديد بأن  $J_1$  و  $J_2$  و  $J_3$  هي عزوم عطالة الجسم حول محاور عطالته الرئيسية  $D_1$  و  $D_2$  و  $D_3$  المتماصة معه ، وان  $\omega_1$  و  $\omega_2$  و  $\omega_3$  هي مركبات السرعة الزاوية ( شمع الدوران ) على تلك المحاور .

## VI — نظرية الاندفاع الزاوي ومعادلات أولر للحركة :

بعد أن درسنا الاندفاع الزاوي والطاقة الحركية دراسة مستفيضة يمكننا الآن أن نطبق نظرية الاندفاع الزاوي لإيجاد معادلات الحركة الدورانية للجسم . وسنعتبر المحاور الرئيسية للجسم لما تقدمه من تبسيط في رياضيات العلاقات الناتجة .

لتكن  $\vec{e}_1$  و  $\vec{e}_2$  و  $\vec{e}_3$  أشعة واحدة مجموعة المحاور الرئيسية ،  $ox'$  ،  $oy'$  ،  $oz'$  والتي سنرمز لها للاختصار بالرمز  $S'$  ، تميزاً لها عن جملة المحاور الاحداثية  $ox$  ،  $oy$  ،  $oz$  التي نرمز لها بالرمز  $S$  . ويمكن أن نكتب :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \quad (30)$$

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e}_1 + J_2 \omega_2 \vec{e}_2 + J_3 \omega_3 \vec{e}_3 \quad (31)$$

$$\vec{\Lambda} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \quad (32)$$

ولما كانت جملة المحاور الرئيسية  $S'$  متماسكة مع الجسم وتدور معه فإن شراع دورانها حول الجملة  $S$  هو  $\vec{\omega}$  . وبتطبيق نظرية الاندفاع الزاوي في الجملة  $S$  نجد :

$$\vec{\Lambda} = d \vec{\Omega} / dt |_0 = d \vec{\Omega} / dt |_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega} \quad (33)$$

وبالتعويض في هذه العلاقة من (30) و (31) و (32) واسقاط العلاقة الناتجة على محاور الجملة  $S'$  نجد :

$$\left. \begin{aligned} J_1 \omega_1' + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= \Lambda_1 \\ J_2 \omega_2' + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= \Lambda_2 \\ J_3 \omega_3' + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= \Lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

تسمى هذه المعادلات الثلاث بمعادلات أولير . وحلها يعين شعاع النوران  $\vec{\omega}$  في أية لحظة زمنية  $t$  . وبتميز آخر هذا الحل يعين الحركة . إلا أننا على كل حال لن نحل هذه المعادلات مباشرة بل سنستخدمها في حالات مختلفة للحصول على معادلات أخرى قد تكون أسهل حلاً .

## VII - المستقيم والمستوي اللامتحولان في حالة انعدام العزم الحاصل :

لنعتبر الحالة التي يكون فيها العزم الحاصل  $\vec{A}$  معدوماً . ففي هذه الحالة تدلنا العلاقة (33) على أن الاندفاع الزاوي ثابت في الجملة الفراغية  $S$  . إذن :

$$\vec{\Omega} = \text{const} \quad (35)$$

بالإضافة إلى ذلك ، إذا ضربنا العلاقات (34) بـ  $\omega_1$  ،  $\omega_2$  ،  $\omega_3$  على الترتيب وجمعناها نجد :

$$J_1 \omega_1 \omega'_1 + J_2 \omega_2 \omega'_2 + J_3 \omega_3 \omega'_3 = 0$$

أو :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2] = \frac{dT}{dt} = 0$$

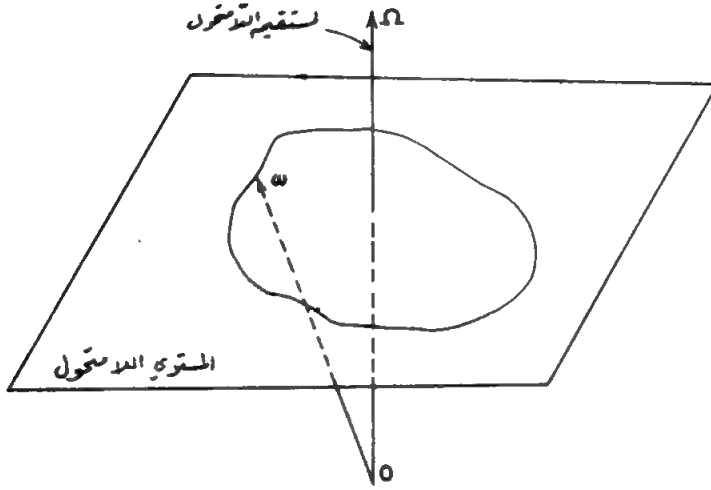
أو :

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} = \text{const} \quad (36)$$

ولصل من الواضح من العلاقة الأخيرة أن مركبة  $\vec{\omega}$  على  $\vec{\Omega}$  ثابتة . وهذا يدل على أن رأس الشعاع  $\vec{\omega}$  يقع دوماً في مستويات متعامد مع  $\vec{\Omega}$  .



يسمى حامل الشعاع الثابت  $\vec{\Omega}$  بالمستقيم اللامتحول كما يسمى المستوي آف الذكر بالمستوي اللامتحول . انظر الشكل (2) .



الشكل (2)

### VIII - حركة الجسم المتناظر - مخروط الجسم ومخروط الفراغ :

ليكن الجسم المتحرك متناظراً بالنسبة لمحور منه . ولنختار جملة مقارنة متماثلة مع الجسم  $ox'y'z'$  بحيث ينطبق احد محاورها وليكن  $oz'$  على محور تناظر الجسم . وسنفرض ان الجسم يدور بحيث تبقى نقطة منه ثابتة ، وان القوى المؤثرة فيه هي بحيث يكون عزمها الحاصل حول تلك النقطة معدوماً . أي  $\vec{A} = 0$  .

إذا كانت  $\vec{e}_1$  و  $\vec{e}_2$  و  $\vec{e}_3$  أشعة واحدة الجلة  $ox'y'z'$  وكانت  $J_1 = J_2 \neq J_3$  فإن بالترتيب فان  $J_3$  و  $J_2$  و  $J_1$  عزوم المطالة حول محاورها بالترتيب فان  $J_3$  و  $J_2$  و  $J_1$  نظراً لتناظر الجسم ولكون الجلة تشكل المحاور الرئيسية للجسم . وتصبح معادلات أولير للحركة عندئذ كما يلي :

$$J_1 \omega'_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (37)$$

$$J_1 \omega'_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (38)$$

$$J_3 \omega'_3 = 0 \quad (39)$$

نجد بسهولة من (39) أن :

$$\omega_3 = A = \text{ثابت} \quad (40)$$

وتصبح المعادلتان (37) و (38) كما يلي :

$$\omega'_1 + \frac{J_3 - J_1}{J_1} A \omega_2 = 0 \quad (41)$$

$$\omega'_2 + \frac{J_1 - J_3}{J_1} A \omega_1 = 0 \quad (42)$$

ومنها نجد :

$$\omega''_2 + k^2 \omega_2 = 0, \quad k = \left| \frac{J_3 - J_1}{J_1} \right| A \quad (43)$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية هو :

$$\omega_2 = B \cos k t + C \sin k t \quad (44)$$

وإذا اخترنا شروط البدء بحيث تكون  $\omega_2 = 0$  عندما  $t = 0$  فإن  $B = 0$  وبالتالي :

$$\omega_2 = C \sin kt \quad (45)$$

كما نجد بطريقة مماثلة أن :

$$\omega_1 = C \cos kt \quad (46)$$

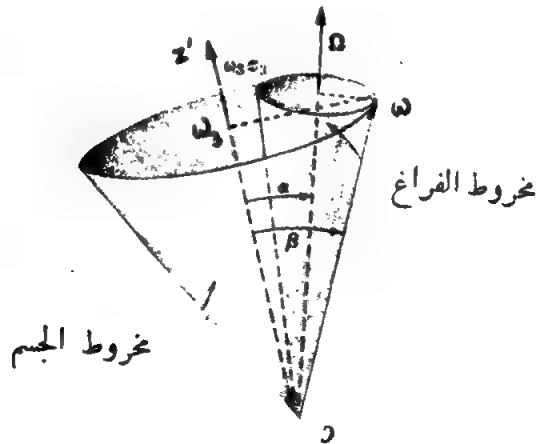
وأخيراً فإن شعاع الدوران  $\vec{\omega}$  يعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \\ &= C \cos kt \vec{e}_1 + C \sin kt \vec{e}_2 + A \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (47)$$

والجدير بالملاحظة هنا هو أن :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= C^2 & (\text{ثابت}) \\ \omega_3 &= A & (\text{ثابت}) \\ \omega &= |\omega| = \sqrt{A^2 + C^2} & (\text{ثابت}) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

نستنتج من ذلك ان شعاع الدوران  $\vec{\omega}$  يرسم مخروطاً دورانياً حول المحور  $oz'$  بسرعة زاوية ثابتة  $k$ . وهذا المخروط ثابت في جملة الجسم  $ox'y'z'$  ولذا يسمى « بمخروط الجسم » انظر الشكل (3) .



الشكل (3)

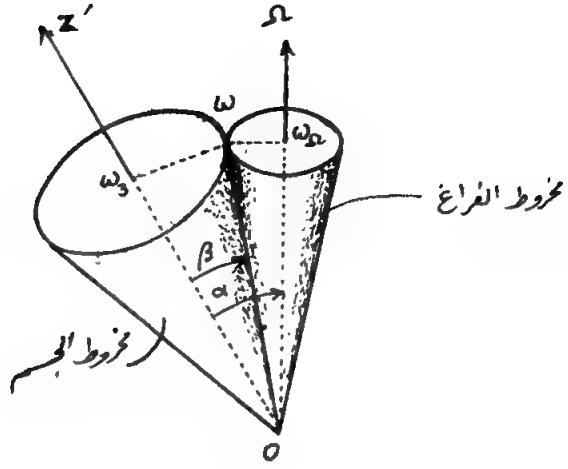
هذا وقد وجدنا سابقاً أن الاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  ثابت في الفراغ وأن الجداء الداخلي  $\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}$  أيضاً ثابت . انظر العلاقات (35) و (36) . وهذا يدل على أن مسقط  $\vec{\omega}$  على الشعاع الثابت  $\vec{\Omega}$  ثابت دوماً . ولما كانت  $\vec{\omega}$  ثابتة فأننا نستنتج أن  $\vec{\omega}$  يرم مخروطاً دورانياً ثابتاً في الفراغ ومحوره  $\vec{\Omega}$  . ويسمى هذا المخروط الثابت في الفراغ « بمخروط الفراغ » . وأخيراً يمكننا بالحساب المباشر البسيط أن نرى أن :

$$\vec{\Omega} \cdot (\vec{\omega}_3 \wedge \vec{\omega}) = 0 \quad (49)$$

وهذا يدل على أن  $\vec{\omega}$  ،  $\vec{\omega}_3$  ،  $\vec{\Omega}$  كلها واقعة في مستو واحد . ونتيجة لكل ما سبق نستطيع أن نصل إلى النتيجة التالية وهي أن مخروط الجسم (الذي ترسمه  $\vec{\omega}$  في الجملة  $ox'y'z'$  المتناسكة مع الجسم) يتدحرج أثناء الحركة على مخروط الفراغ (الثابت في الفراغ والذي ترسمه  $\vec{\omega}$  حول  $\vec{\Omega}$ ) . وبعبارة أخرى ، أن الحركة تتبين بدحرجة مخروط الجسم على مخروط الفراغ . ولذلك فلنأخذ نسمي مخروط الجسم بالتدحرج ونسمي مخروط الفراغ بالقاعدة . لمعرفة وضع المخرطين الجسمي والفراغي بالنسبة لبعضها نرمز للزاوية بين  $oz'$  و  $\vec{\Omega}$  بالرمز  $\alpha$  وللزاوية بين  $oz'$  و  $\vec{\omega}$  بالرمز  $\beta$  . وهاتان الزاويتان تعينان من العلاقات :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{\omega}_3 \cdot \vec{\Omega}}{|\vec{\omega}_3| |\vec{\Omega}|} \quad (50)$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{\omega}_3 \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}_3| |\vec{\omega}|} \quad (51)$$



الشكل ( 4 )

ولما كان :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_3 &= A\vec{e}_3 \\ \vec{\omega} &= C(\cos kt \vec{e}_1 + \sin kt \vec{e}_2) + A\vec{e}_3 \\ \vec{\Omega} &= CJ_1(\cos kt \vec{e}_1 + \sin kt \vec{e}_2) + AJ_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

فاننا نجد بالحساب المباشر ان :

$$\cos \alpha = \frac{J_3 A}{\sqrt{J_1^2 C^2 + J_3^2 A^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}} \quad (35)$$

أو :

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= J_1 C / J_2 A \\ \tan \beta &= C / A \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

ومنه :

$$\tan \alpha / \tan \beta = J_1 / J_2 \quad (55)$$

فاذا كانت  $J_1 < J_2$  كانت  $\alpha < \beta$  وبالتالي وقع مخروط الفراغ داخل مخروط الجسم كما بين الشكل (3). ويقال عندئذ ان مخروط الجسم يتدحرج من الداخل على مخروط الفراغ.

أما اذا كانت  $J_1 > J_2$  كانت  $\alpha > \beta$  وبالتالي وقع مخروط الفراغ خارج مخروط الجسم كما بين الشكل (4). ويقال عندئذ ان مخروط الجسم يتدحرج من الخارج على مخروط الفراغ.

#### IX — تطبيق : حركة الأرض :

من المعلوم ان حركة الأرض في الفراغ تتألف من حركتين رئيسيتين الأولى حركة مركز كتلتها حول الشمس ( وقد سبق ان عالجتنا مثل هذه الحركة بالتفصيل ) والثانية حركتها الدورانية حول مركز كتلتها . وهذه الأخيرة هي موضع اهتمامنا الآن . ولما كانت القوة الوحيدة المؤثرة بالأرض ( وهي قوة جذب الشمس لها ) تمر من مركز الكتلة C الذي يفرض

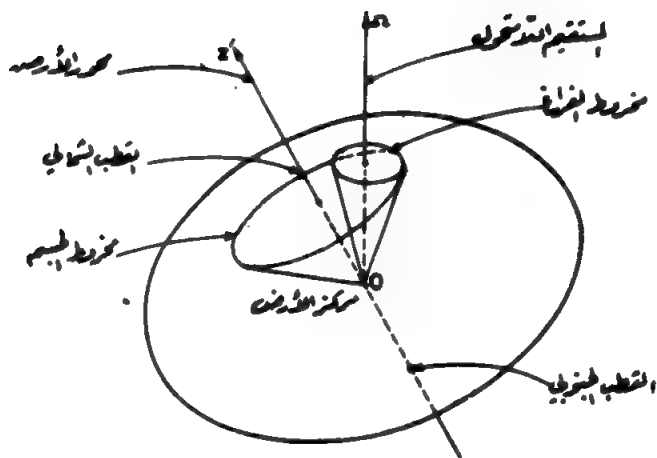
منطبقاً على 0 فان الزخم الحاصل ممدوم أي  $\vec{L} \cong 0$  . وبما ان الأرض متناظرة بالنسبة لمحورها فان  $J_1 = J_2$  . ولهذا كله فان الدراسة التي أتينا على تفصيلها في الفقرة السابقة تنطبق على حركة الأرض الدورانية تماماً .

نلاحظ بشكل خاص ان  $J_1 < J_2$  لأن الأرض مفلطحة عند الاستواء . ولذلك فان مخروطها الجسمي يتدحرج من الداخل على مخروطها الفراغي ،

انظر الشكل (5) . بالاضافة الى ذلك فان مسقط شعاع الدوران  $\omega$

على الشعاع الثابت  $\theta$  يعطى بالعلاقة :

$$\omega_{\Omega} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}}{|\Omega|}$$



الشكل (5)

$$\omega_{\Omega} = \frac{C^2 J_1 + A^2 J_3}{\sqrt{C^2 J_1^2 + A^2 J_3^2}} \quad (56)$$

مما يدل على أن للأرض حركة دورانية منتظمة حول المحور الثابت في الفراغ

$\vec{\Omega}$  . وهذه الحركة الدورانية تسمى « بحركة المبادرة » للأرض . انظر الشكل (5) . ودور هذه الحركة هو نفس دور شعاع الدوران  $\vec{\omega}$  أي :

$$P = 2\pi / k = \frac{2\pi}{A} \frac{J_1}{J_1 - J_3} = 305 \text{ days} \quad (57)$$

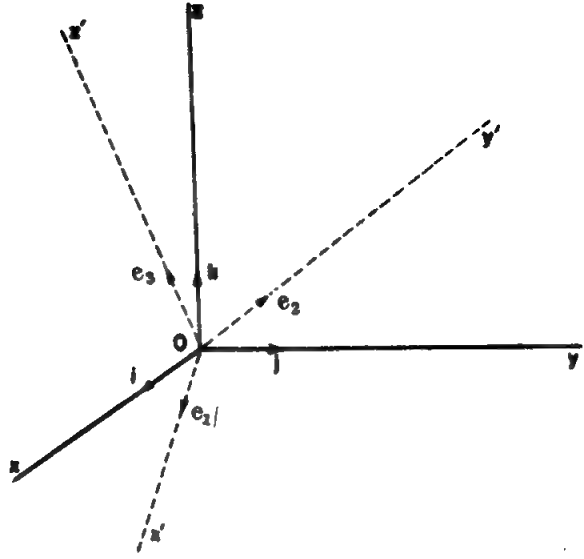
والقيمة 305 للدور مستنتجة من الحساب المباشر . وقد وجد ان دور حركة المبادرة للأرض هو حوالي 430 يوماً . ويملل الفرق بكون الأرض غير صلبة بكاملها بل تشغل البحار السائلة جزءاً كبيراً من كتلتها .

### X — زوايا اولير :

لقد كنا نعالج الحركة الدورانية حتى الآن بدلالة مركبات شعاع الدوران على محاور الجلة  $ox'y'z'$  المتماسكة مع الجسم الدائر . وهذه المعالجة لا تلقي ضوءاً ساطعاً على نوعية الحركة وخواصها . وحتى يتحقق ذلك يجب ان ندرس الحركة بالنسبة لجلة عطالية  $oxyz$  مباشرة . ويكفي هذا القول ان من الواجب الآن ربط شعاع الدوران بالجلة العطالية . وبمباراة أخرى يجب التفطيش عن زوايا الدوران المناسبة بحيث تظهر الصلة بين الجلة المتحركة والجلة العطالية . لذلك سنفتش عن الزوايا التي يدورها الجسم من وضع تكون فيه جلة المحاور  $ox_0'y_0'z_0'$  ( وهي محاور عطالته الرئيسية ) منطبقة على الجلة العطالية  $oxyz$  الى وضع جديد ما  $ox'y'z'$  . ولما كان وضع الجسم الدائر يتمين بثلاثة متحولات مستقلة فان من الواضح ان الزوايا التي نفتش عنها هي ثلاث وبالتالي هناك ثلاث عمليات دوران لـ  $ox_0'y_0'z_0'$  ( أو  $oxyz$  ) حتى تنطبق على  $ox'y'z'$  .

لتكن الجلة العطالية  $oxyz$  والجلة الدائرة المتماسكة مع الجسم  $ox'y'z'$  وذلك في لحظة ما  $t$  . سنقوم بتدوير  $oxyz$  بثلاث زوايا على ثلاث مراحل





الشكل ( 6 )

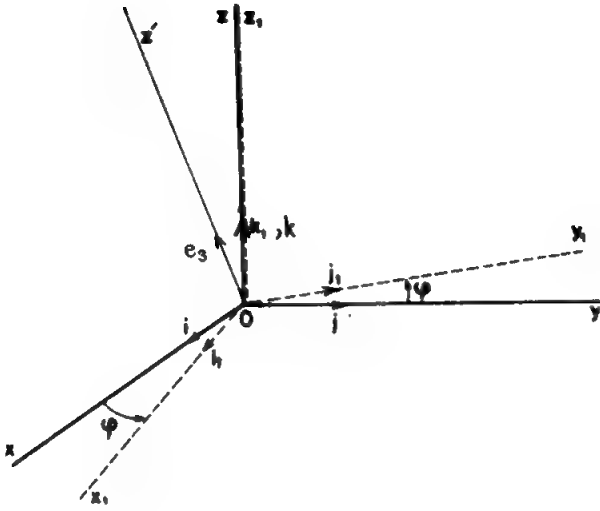
بحيث تؤدي هذه الدورانات الى  $ox'y'z'$  . انظر الشكل ( 6 ) .

#### ١) الدوران الاول :

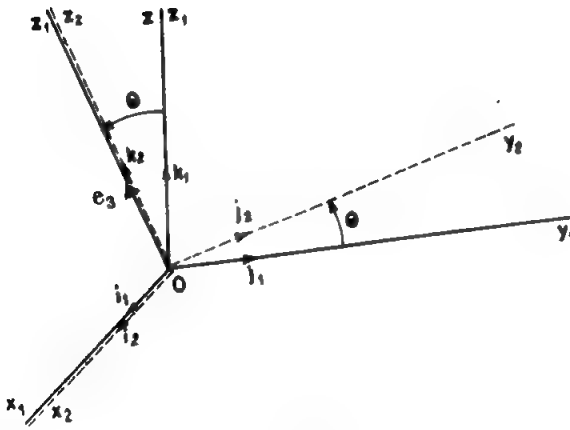
ندور  $oxyz$  بزاوية  $\varphi$  حول المحور  $oz$  الى الوضع  $ox_1y_1z_1$  بحيث يكون  $ox_1$  متعامداً مع كل من  $oz_1$  و  $oz'$  ( المنطبق على  $oz$  ) . وعندئذ تكون لدينا العلاقات التالية بين أشعة الواحدة :

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_1 \cos \varphi - \vec{j}_1 \sin \varphi \\ \vec{j} &= \vec{i}_1 \sin \varphi + \vec{j}_1 \cos \varphi \\ \vec{k} &= \vec{k}_1 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

يبين ذلك الشكل ( 7 ) .



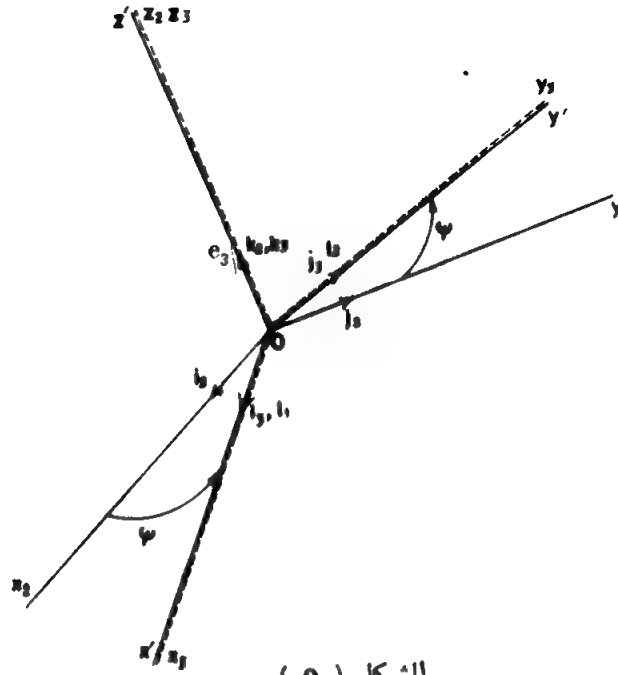
الشكل ( 7 )



الشكل ( 8 )

## (2) الدوران الثاني :

لتكن  $\theta$  الزاوية الكائنة بين  $oz_1$  و  $oz_2$  . ولننظر  $ox_1 y_1 z_1$  الى جديد  $ox_2 y_2 z_2$  بزاوية  $\theta$  حول  $ox_1$  وعندئذ ينطبق  $oz_2$  على  $oz_1$



الشكل ( 9 )

$ox_1$  متعامد مع  $oz_1$  و  $oz'$  . والعلاقات التي تربط أشعة الوحدة عندئذ هي :

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_1 &= \vec{i}_2 \\ \vec{j}_1 &= \vec{j}_2 \cos \theta - \vec{k}_2 \sin \theta \\ \vec{k}_1 &= \vec{j}_2 \sin \theta + \vec{k}_2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

انظر الشكل (8) . ونتيجة لهذا التدوير الذي أدى إلى انطباق  $oz_2$  على  $oz'$  تكون المحاور  $ox_2$  ،  $oy_2$  ،  $ox'$  ،  $oy'$  في مستو واحد . ولتكن  $\psi$  الزاوية الكائنة بين  $ox_2$  و  $ox'$  أو بين  $oy_2$  و  $oy'$  .

( 3 ) الدوران الثالث :

لما كانت المحاور  $ox_2$  ،  $oy_2$  ،  $ox'$  ،  $oy'$  في مستو واحد . وكان

لها نفس المبدأ  $o$  فإن من الواضح أن تدوير  $ox_2 y_2 z_2$  الى الوضع  $ox_3 y_3 z_3$  بالزاوية  $\psi$  حول  $oz_2$  يؤدي إلى انطباق  $ox_3 y_3 z_3$  على  $ox' y' z'$  . وعندئذ علاقات أشعة الواحدة هي :

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_2 &= \vec{i}_3 \cos \psi - \vec{j}_3 \sin \psi \\ \vec{j}_2 &= \vec{i}_3 \sin \psi + \vec{j}_3 \cos \psi \\ \vec{k}_2 &= \vec{k}_3 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

وذلك كما بين الشكل (9) . وبالإضافة الى ذلك ، ولما كانت  $ox_3 y_3 z_3$  منطبقة على  $ox' y' z'$  فإن لدينا العلاقات التالية :

$$\vec{i}_3 = \vec{e}_1 \text{ و } \vec{j}_3 = \vec{e}_2 \text{ و } \vec{k}_3 = \vec{e}_3 \quad (61)$$

وهكذا فإن هذه الدورانات الثلاثة وفق الزوايا  $\varphi$  ،  $\theta$  ،  $\psi$  تعين وضع الجسم بالنسبة للجسملة المطالية  $ox yz$  . وتسمى هذه الزوايا بزوايا أولير .

#### XI — تعيين مركبات شعاع الدوران بدلالة زوايا أولير :

لقد رأينا في الفقرة الأخيرة أن دوران الجسم يتعين بثلاثة دورانات :

الأول حول  $oz$  بزاوية  $\varphi$  او بسرعة زاوية  $\varphi'$

الثاني حول  $ox_1$  بزاوية  $\theta$  او بسرعة زاوية  $\theta'$

الثالث حول  $oz_2$  بزاوية  $\psi$  او بسرعة زاوية  $\psi'$

ولذا فإن شعاع الدوران  $\omega$  يكتب بالشكل التالي :

$$\vec{\omega} = \varphi' \vec{k} + \theta' \vec{i}_1 + \psi' \vec{k}_2 \quad (62)$$

ومن جهة ثانية وجدنا ان

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \quad (63)$$

فاذا حسبنا  $\vec{k}$  ،  $\vec{i}_1$  ،  $\vec{k}_2$  بدلالة  $\vec{e}_1$  و  $\vec{e}_2$  و  $\vec{e}_3$  و  $\varphi$  و  $\theta$  و  $\psi$  من العلاقات ( 58 ) — ( 61 ) وعوضنا في العلاقة ( 62 ) ثم قارنا العلاقة الناتجة بالعلاقة ( 63 ) فاننا نجد :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \varphi' \sin \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi \\ \omega_2 &= \varphi' \sin \theta \cos \psi - \theta' \sin \psi \\ \omega_3 &= \varphi' \cos \theta + \psi' \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

هذه العلاقات تربط بين زوايا اولير ( التي تعين وضع الجسم ) ومركبات شعاع الدوران ( السرعة الزاوية )  $\omega_1$  و  $\omega_2$  و  $\omega_3$  على محاور المطالة الرئيسية للجسم . ويجب الا يغيب عن الذهن ان  $\omega_1$  و  $\omega_2$  و  $\omega_3$  تحقق معادلات اولير وتعين منها . انظر العلاقات ( 34 ) .

## XII — دراسة الحركة بدلالة زوايا اولير :

ان معادلات اولير ( 34 ) هي معادلات تفاضلية تعين لنا مركبات شعاع الدوران بدلالة الزمن . كما ان المعادلات ( 64 ) تربط بين هذه المركبات وزوايا اولير وحدها يؤدي إلى تعيين هذه الزوايا بدلالة الزمن ، أي يؤدي إلى تعيين وضع الجسم الدائر . ولذلك يمكننا ان نلخص كل ما سبق بأن معادلات الحركة الدورانية بصورة عامة هي :

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 \omega'_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= \Lambda_1 \\
 J_2 \omega'_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= \Lambda_2 \\
 J_3 \omega'_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= \Lambda_3 \\
 \varphi' \sin \Theta \sin \psi + \Theta' \cos \psi &= \omega_1 \\
 \varphi' \sin \Theta \cos \psi - \Theta' \sin \psi &= \omega_2 \\
 \varphi' \cos \Theta + \psi' &= \omega_3
 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

ودراسة الحركة تم بحل هذه المعادلات المترافقة لثمين زوايا أولير بدلالة الزمن .

### XIII — حركة الدوامة الجيروسكوبية :

ان دراسة حركة الدوامة المتناظرة من أشهر المسائل التقليدية لحركة الجسم الصلب . وقد لقيت اهتماماً كبيراً من قبل جميع المهتمين في أبحاث تحريك الجسم الصلب ، حتى ان ابجاث بعض العلماء في هذا الموضوع شملت مجلدات بكاملها . وحركة الدوامة من أشهر الحركات الجيروسكوبية التي تتميز بانها حركة جسم صلب متناظر يدور بسرعة كبيرة حول محاور تناظره . وقبل معالجة هذا الموضوع بصورة رياضية نرى ضرورياً ان نلقي نظرة بسيطة على حركة الدوامة كظاهرة فيزيائية قد تدعو الى الدهشة والاستغراب . إذا تأملنا الدوامة اثناء حركتها العامة نرى انها تدور حول محورها بسرعة زاوية كبيرة يطلق عليها اسم حركة البرم او الالتفاف ( spin ) . وبالإضافة الى ذلك فان محور تناظرها يدور ببطء حول الشاقول . وتسمى حركته هذه بحركة المبادرة ( Precession ) . وفوق ذلك فان هناك حركة ثانية لمحور تناظر الدوامة ترافق حركة المبادرة وهي ان محور التناظر هذا يبتعد ويقترّب من الشاقول ( يتأرجح ) اثناء دورانه حول الشاقول . ونقول ان الدوامة تترنح بالنسبة للشاقول . ولذا تسمى هذه الحركة الاخيرة بحركة

الترنج ( nutation ) . ولعل المتأمل في حركة الدوامة يتساءل عن حركتي المبادرة والترنج ويطلب تفسيراً علمياً لهما، في حين انه يستطيع بكل بساطة أن يفسر حركة الالتفاف التي تنتج عن مؤثر خارجي ابتدائي ، إذ أننا بطريقة ما نمطي الدوامة حركة التفاف ابتدائية . ولكن الذي يدعو الى الدهشة والاستغراب اكثر من ذلك كله هو السؤال التالي : لماذا لا تقع الدوامة على الأرض بتأثير قوة ثقلها ، ؟ ان جميع هذه التساؤلات لا يمكن الاجابة عليها فيزيائياً إلا بعد معالجة رياضية مستفيضة وفهم هذه المعالجة من وجهة النظر الفيزيائية . لذا سنعمد إلى اشتقاق المعادلات الرياضية التي تعين الحركة ونناقش حل هذه المعادلات . وعندئذ يمكن ان نحاول الاجابة عن جميع هذه التساؤلات . سنشتق الآن معادلات حركة الدوامة بدلالة زوايا اولير بطريقتين .

## ٢ ( معادلات الحركة - طريقة اولي :

يبين الشكل ( 10 ) الجلمة العطالية  $oxyz$  وجلمة دائرة لاعطالية  $ox'y'z'$  التي ينطبق محورها الثالث  $oz'$  على محور تناظر الدوامة . ومن الواضح اذن ان محاور هذه الجلمة الاخيرة تشكل محاور عطالة رئيسية للدوامة . كما يبين الشكل ايضاً زوايا اولير  $\varphi$  و  $\theta$  و  $\psi$  . سنختار وضع الجلمة  $ox'y'z'$  بحيث تكون المحاور  $oz$  و  $oz'$  و  $oy'$  في مستو واحد، وعندئذ تكون المحاور  $ox$  و  $ox'$  و  $oy$  في مستو واحد ايضاً . وسنفرض اخيراً ان المستقيم  $ON$  متماسك مع الدوامة ومتعامد مع محورها  $oz'$  . ويمكن الآن ان نعتبر حركة الدوامة مؤلفة من حركتين . الأولى حركة التفافها حول المحور  $oz'$  والتي سرعتها الزاوية هي  $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}'_3$  المحمولة على  $oz'$  وهذه الحركة هي الحركة النسبية للدوامة بالنسبة للجلمة  $ox'y'z'$  . أما





$\psi, = S$  قد ألحقت بالدوامة بشكل منفصل واعتبرت كحركة دورانية لها بالنسبة للجملة الدوارة  $ox' y' z'$  . لكتابة معادلات الحركة نطبق نظرية الاندفاع الزاوي في الجملة المطالية أي :

$$\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega} / dt \Big|_I = d\vec{\Omega} / dt + \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega} \quad (69)$$

حيث :

$$\vec{\Lambda} = (L \vec{e}_3) \wedge (-mg \vec{k}) = mg L \sin \theta \vec{e}_1 \quad (70)$$

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e}_1 + J_2 \omega_2 \vec{e}_2 + J_3 (\omega_3 + S) \vec{e}_3 \quad (71)$$

وبالحساب المباشر وبملاحظة أن  $J_2 = J_1$  نجد :

$$J_1 \omega_1' + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 + J_3 \omega_2 S = mg L \sin \theta \quad (72)$$

$$J_1 \omega_2' + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 - J_3 \omega_1 S = 0 \quad (73)$$

$$J_3 (\omega_3' + S') = 0 \quad (74)$$

وزى ببساطة من العلاقة الأخيرة أن

$$\omega_3 + S = A \text{ (ثابت) } \text{ أو } S = A - \omega_3 \quad (75)$$

إذا ضربنا العلاقة (72) بـ  $\omega_1$  والعلاقة (73) بـ  $\omega_2$  والعلاقة (74) بـ  $(\omega_3 + S)$  وجمعنا العلاقات الناتجة نجد :

$$J_1 (\omega_1 \omega_1' + \omega_2 \omega_2') + J_3 (\omega_3 + S) (\omega_3' + S') - mg L \sin \theta \omega_1 = 0$$

وبملاحظة أن  $\omega_1 = \dot{\theta}$  ومكاملة العلاقة الأخيرة نجد أن

$$\frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 (\omega_3 + S)^2 + mg L \cos \theta = E \text{ (ثابت) } \quad (76)$$

وبالتعويض من (68) و (75) نجد :

$$\frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_3 A^2 + mg L \cos \theta = E \quad (76)$$

والآن إذا عدنا إلى المعادلة (73) وعوضنا فيها عن  $S$  بـ  $A - \omega_3$  فإنها تصبح

$$J_1 \omega_2' + J_1 \omega_3 \omega_1 - J_3 A \omega_1 = 0 \quad (77)$$

واستعمل العلاقات (68) في (77) وضربها بـ  $\sin \Theta$  ومكاملتها نجد

$$J_1 \varphi'^2 \sin^2 \Theta + J_3 A \cos \Theta = K \quad (\text{ثابت}) \quad (78)$$

نلاحظ ان (76) و (78) معادلتان تفاضليتان تعطيان  $\varphi$  و  $\Theta$  اما المعادلة (75) والتي تكتب

$$\psi' = S = A - \omega_3 = A - \varphi' \cos \Theta \quad (79)$$

فانها تبين  $\psi$  أو  $S$  بمد معرفة  $\varphi$  و  $\Theta$ .

اذن المعادلات (76) و (78) و (79) كافية لتمييز  $\varphi$  و  $\Theta$  و  $\psi$  أي كافية لتمييز الحركة ولذا فهي معادلات الحركة. أما الثابتان  $E$  و  $K$  فيمكن تعيينهما من شروط البدء. وسنرى في الطريقة الثانية ان  $E$  هي الطاقة الكلية للدوامة وان  $K$  هي مركبة الاندفاع الزاوي على المحور الشاقولي  $oz$ .

### (ب) معادلات الحركة - طريقة ثانية :

يمكن أن نشق معادلات الحركة بطريقة قصيرة ومباشرة وتستند الى اساس فيزيائي بحت. وعلى وجه الدقة تستند هذه الطريقة الى استعمال مبدئي انحفاظ الطاقة والاندفاع الزاوي.

لما كانت القوة المؤثرة (الثقل) مشتقة من كون فان الطاقة الكلية  $E$  (وهي مجموع الطاقين الحركية  $T$  والكامنة  $V$ ) ثابتة. أي

$$T + V = E \quad (\text{ثابت}) \quad (80)$$

هذا من جهة ، ومن جهة ثانية فان عزم القوى المؤثرة على الجسم ( قوة الثقل وقوة رد الفعل ) واقعة في المستوى الشاقولي الذي يحوي  $oz$  و  $oy'$  وبالتالي فان الزم  $\vec{\Lambda}$  محمول على  $ox'$  اي على  $\vec{e}_1$ . وله اذن مركبتان

ممدومتان على كل من  $oz'$  و  $oz$  . ويدل ذلك على ان للانفجاف الزاوي مركبتين ثابتتين على هذين المحورين .  
اذن :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_3 = C \text{ (ثابت)} \quad (81)$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = K \text{ (ثابت)} \quad (82)$$

لالحصول على معادلات الحركة نستعمل العلاقات الثلاث الاخيرة بمد حساب  $T$  و  $V$  و  $\vec{\Omega}$  .

$$V = mg L \cos \theta \quad (83)$$

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e}_1 + J_2 \omega_2 \vec{e}_2 + J_3 (\omega_3 + S) \vec{e}_3 \quad (84)$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 (\omega_3 + S)^2 \quad (85)$$

باستعمال هذه العلاقات في العلاقات (80) و (81) و (82) نجد :

$$\omega_1 + S = C/J_3 = A \text{ (ثابت)} \quad (86)$$

$$J_2 \omega_2 \sin \theta + J_3 (\omega_3 + S) \cos \theta = K \quad (87)$$

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 (\omega_3 + S)^2 + m L g \cos \theta = E \quad (88)$$

وأخيراً باستعمال العلاقات (60) في العلاقات الاخيرة نجد :

$$\omega_3 + S = \varphi' \cos \theta + \psi' = A \quad (89)$$

$$J_1 \varphi' \sin^2 \theta + J_3 A \cos \theta = K \quad (90)$$

$$\frac{1}{2} J_1 (\omega'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_3 A^2 + m L g \cos \theta = E \quad (91)$$

ونلاحظ ان هذه المعادلات هي نفس المعادلات (75) و (78) و (76) التي وجدناها سابقاً بالطريقة الاولى . وهذه المعادلات الثلاث تعين لنا الحركة لأن حلها يعين  $\varphi$  و  $\theta$  و  $\psi$  . وسنحاول دراسة الحركة من المعادلات الاخيرة .

ج ( دراسة الحركة :

نلاحظ بادىء الامر ان العلاقة (89) تعين لنا  $\psi' = S$  وبالتالي  $\psi$

فما اذا علمنا  $\varphi$  و  $\theta$  . وهاتان الاخيرتان تميّنان بحل العلاقتين المترافقتين (90) و (91) . لتسهيل حل هاتين المعادلتين سنجري تغييراً مؤقتاً في المتحول  $\theta$  بالشكل التالي :

$$u = \cos \theta \quad (92)$$

ويمكن بالحساب المباشر ان نجد العلاقات التالية :

$$\varphi' = \frac{\gamma - \delta u}{1 - u^2} \quad (93)$$

$$u'^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u) \quad (94)$$

حيث :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2(E - \frac{1}{2} J_3 A^2) / J_1 \\ \beta &= 2mgL / J_1 \\ \gamma &= K/J_1 \\ \delta &= AJ_3/J_1 \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

وبصورة عامة ان حل المعادلة (94) يعين  $u$  وبالتالي  $\theta$  . وعندئذ يعطي حل المعادلة (93) الزاوية  $\varphi$  . الا اننا لن نلجأ الى حل هاتين العلاقتين مباشرة بل سنناقش الحركة بشكل غير مباشر وبدون حل هاتين المعادلتين . نلاحظ قبل كل شيء ان  $\theta' = \sin \theta \cdot u'$  وان  $\theta' = 0$  عندما  $u' = 0$  . اي عندما :

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0 \quad (96)$$

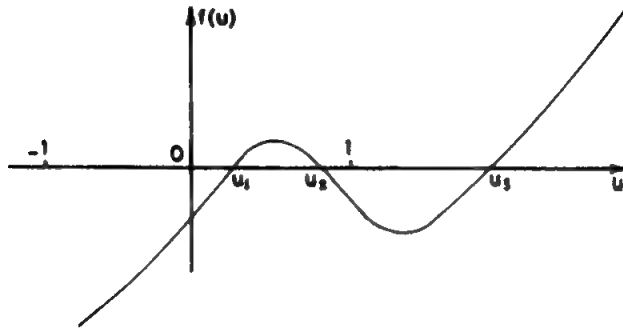
وهذه المعادلة هي من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ  $u$  ولها بصورة عامة ثلاثة جذور  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  . ولما كان  $-1 \leq u = \cos \theta \leq +1$  فان الجذور المقبولة للمعادلة الاخيرة يجب أن تقع في المجال  $(-1, 1)$  . ولمعرفة ما اذا كانت هذه الجذور او بعضها يحقق هذا الشرط يمكننا أن نأخذ فكرة تقريبية عن التابع  $f(u)$  بحساب بعض قيمه الخاصة من أجل بعض القيم لـ  $u$  . فنرى بسهولة مثلاً ان :

$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f(-1) = -(\gamma - \delta)^2 < 0$$

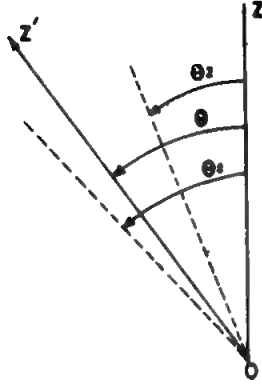
$$f(+1) = -(\gamma + \delta)^2 < 0$$

$$f(+\infty) = +\infty$$



الشكل ( 11 )

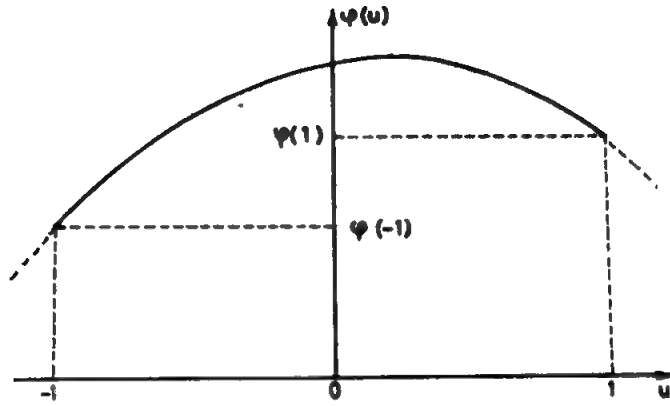
وتدلنا هذه العلاقات على ان الشكل العام للتابع هو كما بين الشكل ( 11 ) .  
 وزى مباشرة ان أحد الجذور وهو  $u_3$  غير مقبول لأنه أكبر من الواحد .  
 أما الجذران الآخران فمقبولان ان وجدنا . ويقابل الجذرين  $u_1$  و  $u_2$   
 قيمتان  $\theta_1$  و  $\theta_2$  للزاوية  $\theta$  . ولما كان  $u^2 = f(u) > u$  فان الجزء  
 المقبول من التابع  $f(u)$  هو الموجب فقط . وبالإضافة الى ذلك فان  
 $-1 < u < +1$  لذلك فان الجزء المقبول للتابع  $f(u)$  هو الواقع بين  
 $u_1$  و  $u_2$  . نستنتج من كل ذلك ان  $\theta$  تتحول بين القيمتين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  ،  
 كما بين الشكل ( 12 ) .



الشكل (12)

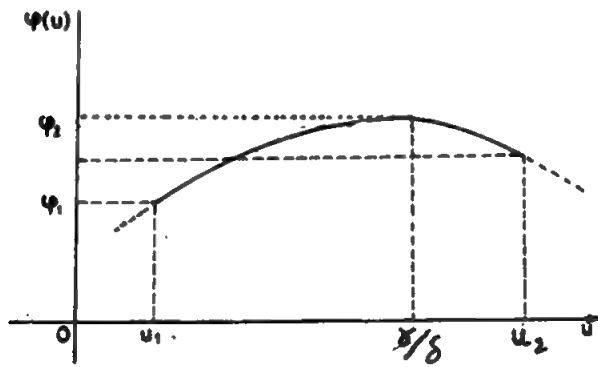
لنعد الآن الى العلاقة (9.3) . نلاحظ من هذه العلاقة أن  $\varphi' = 0$  عندما  $u = \gamma/\delta$  وهو مقدار موجب . وزى ان  $\varphi' > 0$  عندما  $u < \gamma/\delta$  وان  $\varphi' < 0$  عندما  $u > \gamma/\delta$  . فتحولات  $\varphi$  يمثلها الشكل (13) .

ولدراسة حركة محور السوامة  $oz$  نميز الحالات المختلفة التالية :  
 اولاً :  $u_1 < \gamma/\delta < u_2$  في هذه الحالة تتحول  $\theta$  بين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  وعندئذ تكون تحولات  $\varphi$  كما يبين الشكل (14) . أما حركة المحور  $oz'$  فيمكن تمييزها بحركة  $Q$  نقطة تقاطع هذا المحور مع كرة مركزها  $O$  . ويمثلها الشكل (15) . ويجب أن نلاحظ ان  $\varphi$  تزداد من  $\varphi_1$  حتى تبلغ قيمة عظمى ثم تأخذ بالتناقص الى قيمة اخرى  $\varphi_2$  . هذا يعني ان المحور  $oz'$  يتنح بين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  من جهة ويسور ( حركة مبادرة ) حول المحور  $oz$  من جهة أخرى . وفي هذه الحركة الاخيرة تقدم ثم تراجع . ويمثل الجزء المستمر



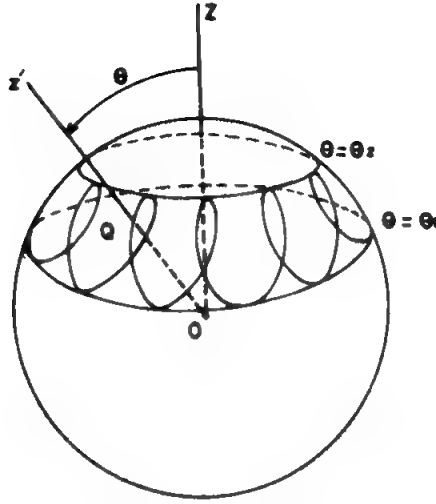
الشكل ( 13 )

من المنحني في الشكل (15) مسار Q عندما تتغير  $\theta$  من  $\theta_1$  الى  $\theta_2$  ثم



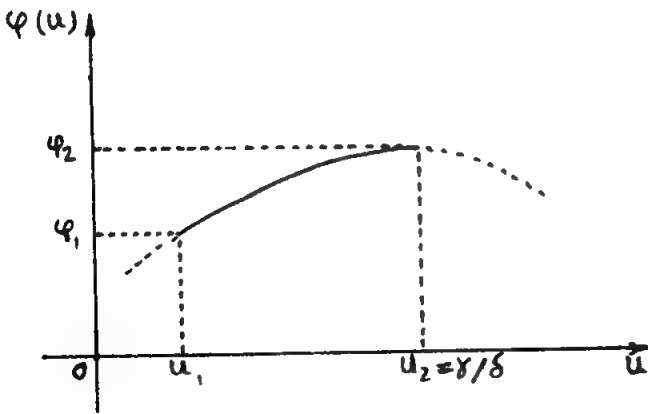
الشكل ( 14 )

تعود من  $\theta_2$  الى  $\theta_1$  . وبعد ذلك تعود الزاويتان  $\theta$  و  $\varphi$  فتتغيران من جديد وبصورة دورية ، وهكذا .



الشكل ( 15 )

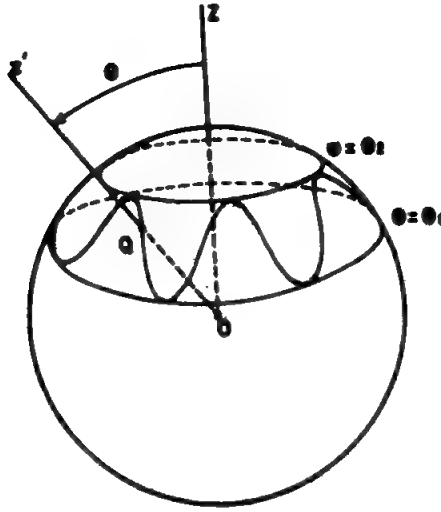
ثانياً:  $u_2 = \gamma/\delta$  . في هذه الحالة تكون  $\varphi$  متزايدة بين  $u_1$  و  $u_2$  وتأخذ نهايتها المظلمى عند  $u_2$  . وليس في الحركة تراجع بالنسبة لـ  $\varphi$  . ونحصل عندئذ على الشكلين ( 16 ) و ( 17 ) اللذين يبينان  $\varphi$  وحركة المحور  $oz_1$  .



الشكل ( 16 )







الشكل ( 19 )

ملاحظة : يمكن الحصول على حالات مشابهة لما سبق عندما تكون  $u_1 < \gamma/\delta$  أو  $u_1 = \gamma/\delta$  وترك دراستها للطلاب كتمرين .

#### XIV - تفسير الحركة الجيروسكوبية للدوامة :

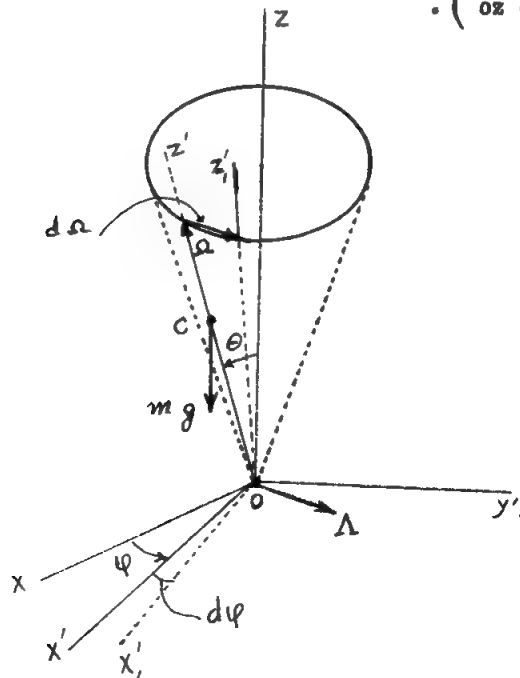
لم نجد صعوبة في فهم دوران الدوامة حول محور تناظرها لأننا أعطينا الدوامة مثل هذه الحركة في البدء . ولكننا تساءلنا عن سبب حركة المبادرة وحركة الترنح وعدم سقوط الدوامة على الأرض بتأثير قوة الثقل . وسنحاول تبسيط الإجابة على هذه التساؤلات .

لنفرض أن الدوامة ( أو الجيروسكوب ) تدور حول محور تناظرها بسرعة كبيرة . عندئذ يمكننا أن نقول ان اندفاعها الزاوي  $\vec{D}$  محمول تقريباً في لحظة ما على محورها  $oz_1$  أو على محور قريب جداً منه . ولنفرض

ان المحاور  $ox$  و  $oz$  و  $oz'$  مستوية في تلك اللحظة . فاذا دار هذا المستوى حول  $oz$  زاوية صغيرة  $d\varphi$  فان الاندفاع الزاوي يتغير اتجاهه ويبقى ثابتاً بالطول تقريباً . ويساوي هذا التغير :

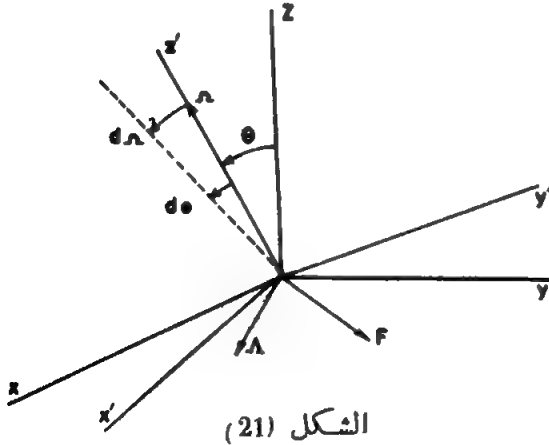
$$| d\vec{\Omega} | = \Omega \sin \theta d\varphi$$

وهذا التغير متعامد مع المستوى  $(ox, oz, oz')$  . ولكن التغير في الاندفاع الزاوي ينشأ عن مزوجة توازي هذا التغير . فالمزوجة  $\vec{\Lambda}$  التي سببت هذا التغير يجب أن تكون متعامدة مع المستوى المذكور ، كما يبين الشكل (20) . وإذا لاحظنا ان قوة الثقل لها مثل هذه المزوجة امكنا عندئذ ان نفهم السبب في حركة المبادرة ( أي حركة محور الدوامة  $oz'$  حول الشاقول  $oz$  ) .



الشكل (20)

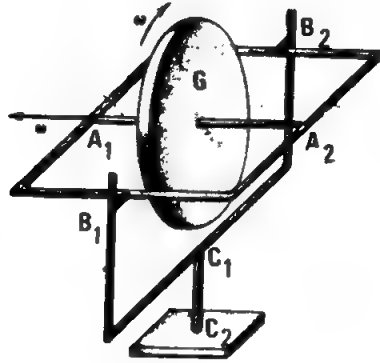
أما حركة الترنج وعدم سقوط الدوامة بتأثير قوة الثقل فتفسران كما يلي .  
 ان الدوامة تبدأ بالسقوط فعلاً واثناء سقوطها يتغير الاندفاع الزاوي بتأثير  
 هذا السقوط تغيراً واقماً تقريباً في المستوى الشاقولي ( $oz$  و  $oz'$  و  $ox$ ) .  
 وهذا التغير يجب ان ينتج عن مزدوجة  $\vec{A}$  في نفس المستوى أي عن قوة  $\vec{F}$   
 عمودية على المستوى المذكور . انظر الشكل (21) . ونظراً لعدم وجود  
 مثل هذه القوة فان على الجسم ان يعوض هذه القوة او هذه المزدوجة  
 بطريقة حركية فيتحرك بحيث ينتج تغيراً في الاندفاع الزاوي الذي ينشأ  
 عنه بدوره قوة تماكس القوة الأولى  $\vec{F}$  ، أي أنه يتحرك و يسقط ، نحو  
 الأعلى . ويكون بذلك قد قاوم حركة السقوط من جهة وقام بحركة  
 ترنجية واحدة . فاذا استقر تقريباً بعد اندام القوتين الناتجتين عن سقوطه  
 نحو الأسفل ثم نحو الأعلى ، عاد من جديد وخضع لحركة سقوط جديدة  
 تنشأ عنها فيما بعد حركة معاكسة نحو الأعلى وهكذا .



#### XV — الجيروسكوب :

تعد حركة الدوامة التي درسناها من أشهر الحركات الجيروسكوبية .

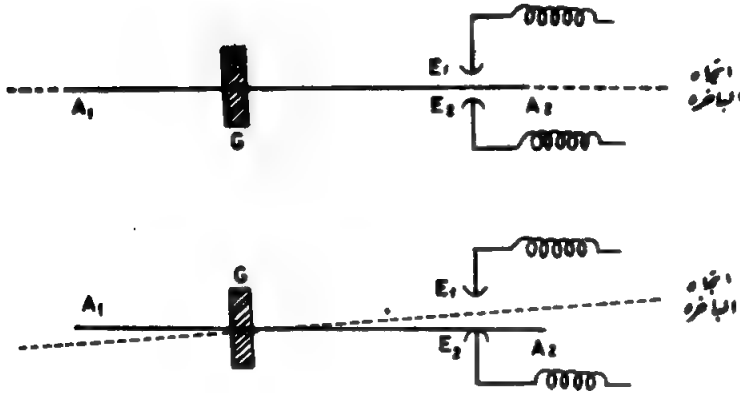
وبصورة عامة ان اي جسم دوراني يدور حول محور تناظره بسرعة كبيرة يسمى جيروسكوبا . ولقد اخترعت كلمة جيروسكوب لتدل على آلة يؤثر عليها دوران الأرض فيحدث تأثيراً ملحوظاً . وتطلق اليوم كلمة جيروسكوب على أية جملة ميكانيكية ذات جسم صلب متناظر ويدور حول محوره بسرعة كبيرة وبحيث يمكنه تغيير اتجاه شعاع دورانه ( أو شعاع السرعة الزاوية ) بمختلف الاتجاهات . ويمثل الشكل ( 22 ) احد الاشكال المبسطة للجيروسكوب .



الشكل (22)

ونلاحظ ان الجيروسكوب G يدور حول المحور  $A_1 A_2$  في الاطار الأفقي F . كما ان هذا الاطار يدور حول المحور  $B_1 B_2$  في الاطار الشاقولي  $F'$  الذي يمكنه أن يدور حول المحور  $C_1 C_2$  . وبذلك يكون بإمكان الجيروسكوب G ان يأخذ أي اتجاه مهما كان . وعندما يكون الجيروسكوب في حالة استعمال يدور حول محوره بسرعة كبيرة جداً بحيث يكون له اندفاع زاوي  $\vec{Q}$  كبير وتحمل على محوره  $A_1 A_2$  . ولما كان الجهاز مصمماً بحيث يبقى مركز ثقله

ثابتاً فإن المزدوجة ( عزم قوة الثقل )  $\vec{A}$  معدومة وبالتالي فالاندفاع الزاوي  $\vec{Q}$  محفوظ ، أي أنه ثابت بطوله واتجاهه . وبالتالي فإن المحور  $A_1A_2$  اتجاهها ثابتاً دوماً ومما كانت حركة الوسط الموجود فيه .



الشكل (23)

يستفاد من هذه الخاصية باستعمال الجيروسكوب في البواخر والطائرات لتوجيهها باتجاه ثابت كما بين الشكل (23) . فإذا كان المحور  $A_1A_2$  يشير الى الاتجاه المرغوب للباخرة مثلاً وإذا دارت الباخرة أي إذا غيرت اتجاهها لسبب خاطيء ما او لسبب طبيعي كموجة قوية فإن المحور  $A_1A_2$  يبقى ثابتاً . وبالتالي فإن الباخرة هي التي تدور فقط . وعندئذ فإن المحور  $A_1A_2$  يلامس أحد المربطين  $E_1$  أو  $E_2$  ( حسب جهة الدوران ) وبالتالي تفلق دائرة كهربائية مميّنة تتصل بجهاز آلي لتصحيح اتجاه الباخرة . كما يستعمل الجيروسكوب ايضاً لكشف دوران الارض . ويسمى الجهاز المستعمل بالبوصله الجيروسكوبية وتستخدم هذه البوصله لمعرفة اتجاه الشمال الحقيقي في مكان ما وفي كشف دوران الارض . ونكتفي بالاشارة فقط الى هذا الجهاز دون تفصيل في كيفية عمله .

## الفصل الثاني عشر

### ميكانيك لاغرانج

- الاحداثيات العامة
- معادلات التحويل
- تصنيف الجمل الميكانيكية
- السرعة العامة — الاندفاعات العامة — الطاقة الحركية
- القوى العامة
- معادلات لاغرانج للجمل البسيطة
- معادلات لاغرانج للجمل المعقدة
- معادلات لاغرانج في حالة القوى النبضية





لقد اعتمدنا في دراسة الميكانيك حتى الآن على قوانين نيوتن . سندرس الميكانيك في هذا الفصل والفصل الذي يليه بشكل عام معتمدين على وجهات نظر عامة يرجع الفضل فيها الى المسالين لاغرانج وهاملتون . وبالرغم من ان الطريقة الجديدة تعتمد في صياغتها على قوانين نيوتن الا انها تمتاز عن هذه القوانين بالناحيتين التاليتين :

- ١ - سهولة الصياغة الرياضية والحل للمسائل الميكانيكية .
- ٢ - علاقتها نظرياً وتطبيقياً بمجالات متقدمة اخرى للميكانيك كميكانيك الكم والميكانيك السماوي والميكانيك الاحصائي والميكانيك الكهربائي (الكتروديناميك) .

## I - الاحداثيات العامة :

لنفرض ان جملة ميكانيكية تتحرك ضمن قيودا او عدة قيود . ان هناك حداً أدنى من التحولات المستقلة اللازمة لتعيين موضع الجملة . هذه الاحداثيات او التحولات المستقلة والتي رمز لها بالرموز  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  تسمى بالاحداثيات العامة للجملة الميكانيكية . ويمكن أن تكون هذه الاحداثيات مسافات او زوايا او مقادير اخرى مرتبطة بها . وعدد هذه الاحداثيات  $n$  يساوي عدد درجات حرية الجملة الميكانيكية المتبرة . وهناك بصورة عامة مجموعات مختلفة من الاحداثيات يمكن اعتبارها كاحداثيات عامة ، الا ان لحسن الاختيار أهمية كبرى في تسهيل الجزء الرياضي من صياغة ودراسة معادلات الحركة .

## II - معادلات التحويل :

لنعتبر جملة ميكانيكية مؤلفة من  $n$  جزيء مادي يتعين كل منها بشمع  
الموضع  $\vec{r}_i$  او بالاحداثيات الديكارتية  $x_i, y_i, z_i$  . ترتبط هذه الاحداثيات  
بالاحداثيات العامة بعلاقات تسمى معادلات التحويل ( اي التحويل من  
مجموعة من الاحداثيات الى مجموعة اخرى هي الاحداثيات العامة ) ويمكن  
كتابة هذه المعادلات بالشكل :

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i ( q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t ) \\ y_i &= y_i ( q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t ) \\ z_i &= z_i ( q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t ) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حيث  $t$  الزمن . وبشكل شعاعي يمكن كتابة (1) على النحو التالي :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i ( q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t ) \quad (2)$$

ويفترض ان جميع التوابع في العلاقات (1) و (2) مستمرة ولها  
مشتقات مستمرة .

## III - تصنيف الجمل الميكانيكية :

يمكن تصنيف الجمل الميكانيكية وفق وجهات نظر ثلاث : الزمن  
والاحداثيات والطاقة .

١ - من وجهة نظر الزمن تصنف الجمل الميكانيكية الى سكليرونومية  
وربونومية .

آ ) اذا لم يظهر الزمن  $t$  مباشرة في العلاقات (1) أو (2) فان  
الجملة تسمى سكليرونومية .

( ب ) أما إذا ظهر الزمن  $t$  مباشرة في العلاقات المذكورة ( أي إذا كانت بعض التوابع قوابع ظاهرة بالنسبة للزمن  $t$  ) فإن الجملة تسمى رينومية . وبلاحظ في هذه الحالة ان القيد متحرك .

٢ - أما من وجهة نظر الاحداثيات العامة فتصنف الجملة الى هولونومية ولا هولونومية .

( آ ) إذا كانت القيود المفروضة على الحركة قابلة للتعبير عنها بملاقات من الشكل :

$$f ( q_1 , q_2 , q_3 , \dots , q_n , t ) = 0$$

أو مايعادل ذلك ، يقال عن الجملة عندئذ انها هولونومية .  
( ب ) والا قيل عنها انها لا هولونومية .

٣ - واما من وجهة نظر الطاقة فإن الجمل محافظة او غير محافظة .  
( آ ) فإذا كانت جميع القوى المؤثرة في نقاط الجملة مشتقة من ككون قيل عن الجملة انها محافظة وتكون طاقتها ثابتة في جميع اوضاعها .  
( ب ) أما اذا لم تكن القوى كذلك فالجملة غير محافظة وطاقها غير ثابتة .  
وباعتبار وجهات النظر الثلاث يقال عن الجملة انها بسيطة اذا كانت من الانواع ( آ ) أي سكليرنومية أو هولونومية او محافظة . ويقال عنها انها مقعدة اذا كانت من الانواع ( ب ) اي رينومية او لا هولونومية او غير محافظة .

#### IV - السرعة العامة - الاندفاعات العامة - الطاقة الحركية :

نسمي مشتقات الاحداثيات العامة بالنسبة للزمن بالسرع العامة فهي إذن :  $q'_1 , q'_2 , q'_3 , \dots , q'_n$  . وتكتب الطاقة الحركية للجملة بالشكل :

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i ( x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 ) \quad (3)$$

حيث  $N$  عدد جزيئات الجلة . وعندما نستعمل العلاقات (1) او (2) فان الطاقة الحركية تكتب عندئذ بدلالة السرعة العامة  $q_j$  ، حيث  $(j=1, \dots, n)$  ، والتابع الذي يعين الطاقة الحركية عندئذ يحوي حدوداً متجانسة من الشكل  $a_{jj} \cdot q'_j \cdot q'_j$  فيما اذا كانت الجلة بسيطة . أما اذا كانت معقدة فيحوي بالإضافة الى الحدود المتجانسة حدوداً من الشكل  $b_i \cdot q'_i$  . وباختصار يمكن القول ان الطاقة الحركية متجانسة من الرتبة الثانية من أجل الجمل البسيطة وغير متجانسة بالنسبة للجمل المعقدة .

في حالة الاحداثيات الديكارتية يعطى الاندفاع بالعلاقة :

$$p = mv = \frac{d}{dv} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d T}{d v} \quad (4)$$

أي ان الاندفاع هو مشتق الطاقة الحركية بالنسبة للسرعة . وتكافئ هذه العلاقة العلاقات الثلاث :

$$\left. \begin{aligned} p_x = mx' &= \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \right] = \frac{\partial T}{\partial x'} \\ p_y = my' &= \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \right] = \frac{\partial T}{\partial y'} \\ p_z = mz' &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \right] = \frac{\partial T}{\partial z'} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

بالمقارنة مع حالة الاحداثيات الديكارتية ، نعرف الاندفاعات العامة بانها مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة للسرعة العامة أي :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \quad \text{و} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

وباستعمال العلاقة (3) نجد :

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q'_i} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \vec{r}_j'^2 = \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial q'_i} \quad (7)$$

ملاحظة : اعتباراً من الآن سنختصر اشارة المجموع على الشكل البسيط  $\sum$  ونفي بذلك أن  $j$  ستأخذ جميع القيم الممكنة ، أي من 1 الى  $n$  في مثل الحالة الأخيرة .

$V$  - القوى العامة :

لقد رأينا ان العمل الذي تقوم به القوى  $\vec{F}_i$  المطبقة على الجسم أثناء انتقالات عنصرية  $d\vec{r}_i$  هو :

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (8)$$

ويكتب هذا العمل بدلالة الاحداثيات العامة بالشكل :

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j \\ &= \sum_j \left[ \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] dq_j \end{aligned} \quad (9)$$

ومن جهة ثانية يمكن كتابة التفاضل الكلي للعمل بالشكل :

$$dW = \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j \quad (10)$$

وبمقارنة المالتين الاخيرتين نجد ان :

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \quad (11)$$

ان العلاقة (8) تكتب :

$$dW = \sum_i (F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i + F_{z_i} dz_i) \quad (12)$$

ومنها :

$$\left. \begin{aligned} F_{x_i} &= \frac{\partial W}{\partial x_i} \\ F_{y_i} &= \frac{\partial W}{\partial y_i} \\ F_{z_i} &= \frac{\partial W}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

وهذا يعني ان القوة المرفقة باحدى الاحداثيات هي مشتق العمل بالنسبة لتلك الاحداثية . وبنفس الطريقة سنعرف القوى العامة بانها مشتقات العمل بالنسبة للاحداثيات العامة . وتعطى هذه القوى العامة اذن بالعلاقة .

$$\Phi_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_j m_j \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad (14)$$

ونلاحظ ان واحداث القوة العامة ليست بالضرورة واحداث قوة لأن واحداث  $\vec{r}_j$  هي واحداث طول في حين ان واحداث  $\vec{q}_i$  قد تكون واحداث طول او واحداث زاوية . وبالرغم من ذلك فان العمل يحتفظ بواحدات العمل دائماً . ويمكن أن نرى ذلك من العلاقتين (9) و (14) .

#### VI - ملاحظة حول عملية الاشتقاق :

لتكن العلاقة التالية التي تعين تابعا ما A بدلالة الاحداثيات العامة سواء كان التابع سليا او شعاعيا .

$$A = A ( q_1 , q_2 , q_3 , \dots , q_n , t ) \quad (15)$$

ان المشتق الكلي ( بالنسبة للزمن ) لهذا التابع يعطى عندئذ بالعلاقة :

$$A' = \frac{\partial A}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial A}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial A}{\partial q_n} q_n' + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (16)$$

والمشتقات الجزئية لـ A بالنسبة للسرع العامة هي عندئذ من العلاقة الاخيرة

$$\frac{\partial A'}{\partial q_i'} = \frac{\partial A}{\partial q_i} , i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

كما يدل على إمكانية حذف « الفتحاح » إذا وجدت في كل من الصورة والمخرج وهذه الخاصة عامة وتطبق بالتالي على أشعة الموضع  $\vec{r}_1$  . إذن :

$$\frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial q_i'} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad (18)$$

وهذه العلاقة هامة جداً في هذا البحث .

وبالإضافة الى ذلك فمن المعروف انه اذا كان التابع A قابلاً للاشتقاق من المرتبة الثانية وجميع مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية مستمرة فان من الممكن عندئذ تبادل ترتيب المشتقات الجزئية . أي بعبارة رياضية مختصرة :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_k} A = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i} A \quad (19)$$

وكذلك :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} A = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} A = \frac{\partial A'}{\partial q_i} \quad (20)$$

وينطبق ذلك على  $\vec{r}_j$  لأنها بالفرض محققة لشروط الاشتقاق السابقة . إذن

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_k} \vec{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{r}_i \quad (21)$$

وكذلك :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial q_i} \quad (22)$$

ولهايتين الملائتين ايضاً اهمية في بحثنا هذا .

## VII — معادلات لاغرانج للجمل البسيطة :

ان الطاقة الحركية هي نقطة الانطلاق في اشتقاق معادلات لاغرانج

بصورة عامة . وفي حالة الجمل البسيطة يكون من السهل حساب بعض المتحولات بدلالة الأخرى من علاقة القيد . أي انه يمكن حذف الاحداثيات المستقلة والابقاء على الاحداثيات المستقلة فقط . ولذلك سنفرض في هذه الحالة اننا اخترنا الاحداثيات العامة المستقلة  $q_i$  حيث  $(i = 1, 2, \dots, n)$  . وجدنا ان الطاقة الحركية تعطي بالعلاقة :

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{r}_j'^2 = \sum_j \frac{1}{2} m_j (\dot{\vec{r}}_j')^2 \quad (23)$$

ان مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة للاحداثيات العامة عندئذ هي :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j'}{\partial q_i} \quad (24)$$

ومشتقاتها بالنسبة للسرع العامة هي :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j'}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (25)$$

وذلك باستعمال خاصية الاشتقاق التي تعبر عنها العلاقة (18) والتي تختصر الفتحات بموجبها في كل من صورة ومخرج المشتق الجزئي .

لنشتق الآن طرفي العلاقة الأخيرة اشتقاقاً تاماً بالنسبة للزمن . ونجد :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j' \cdot \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_j'}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned} \quad (26)$$

وذلك باستعمال خاصية الاشتقاق المبرر عنها بالعلاقة (22) . باستعمال العلاقتين

(14) و (24) في العلاقة الأخيرة (26) نجد :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$



وهي الشكل العام لمعادلة لاغرانج بدلالة الطاقة الحركية .

عندما تكون الجملة محافظة أي عندما تشتق جميع القوى من كون ،  
يكون الكون تابياً للاحداثيات العامة فقط دون السرعة العامة أي :

$$V = V ( q_1 , q_2 , \dots , q_n ) \quad (28)$$

وبالتالي لدينا العلاقات

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = - \phi_i , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i'} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (30)$$

إذا عوضنا في المعادلة (27) عن  $\phi_i$  بـ  $\frac{\partial V}{\partial q_i}$  ونقلناها الى الطرف  
الاول ، ثم طرحنا المقدار  $\frac{\partial V}{\partial q_i}$  ( الذي يساوي الصفر ) من  $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$   
في الطرف الاول للمعادلة المذكورة فان المعادلة لاتتغير وبالتالي تصبح بالشكل :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i'} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad (31)$$

أو :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (32)$$

وهي الشكل الجديد لمعادلة لاغرانج من اجل الجمل البسيطة المحافظة  
ويسمى التابع

$$L = T - V \quad (33)$$

بتابع لاغرانج . وغتل المعادلة (32) n معادلة تفاضلية هي معادلات الحركة  
للجملة الميكانيكية المدروسة .

### VIII - معادلات لاغرانج للجمال الميكانيكية المعقدة :

إذا تأملنا صفات الجملة الميكانيكية المعقدة ( راجع الفقرة III ) فاننا

نرى ان تعقيدها ناشئ عن صفة اللاهولونومية التي تتمتع بها والتي تدل على ان تابع او توابع القيد المفروضة على الجملة هي بحيث لا يمكن منها عزل جميع المتحولات ( الاحداثيات ) المستقلة لأن توابع القيد لا يمكن أن تكتب بالشكل الجبري

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

ومعادلات القيود هي بصورة عامة تفاضلية ، أي انها تابعة للسرع العامة .  
ويمكن كتابتها بالشكل :

$$A_1(q_k)q'_1 + A_2(q_k)q'_2 + \dots + A_n(q_k)q'_n + A(q_k) = 0$$

$$B_1(q_k)q_1' + B_2(q_k)q_2' + \dots + B_n(q_k)q_n' + B(q_k) = 0$$

$$R_1(q_k)q'_1 + R_2(q_k)q'_2 + \dots + R_n(q_k)q'_n + R(q_k) = 0$$

وعدد هذه المعادلات هو عدد القيود الالاهولونية المفروضة على الجملة .  
وفي هذه المعادلات جميع الامثال

$$A_i(q_k), B_i(q_k), \dots, R_i(q_k), A, B, \dots, R$$

قائمة بصورة عامة لجميع الاحداثيات العامة  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . ويمكن كتابة علاقات القبود بالأشكال المختصرة :

$$\left. \begin{aligned} &\sum_i A_i(q_k) q'_i + A(q_k) = 0 \\ &\sum_i B_i(q_k) q'_i + B(q_k) = 0 \\ &..... \\ &\sum R_i(q_k) q'_i + R(q_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ونكرر القول مرة ثانية ان عدد هذه العلاقات ، وليكن  $m$  ، هو نفس عدد القيود المفروضة على الجملة . إذن هناك  $m$  علاقة تربط بين  $n$  متحول هي الاحداثيات العامة  $q_i$  . وهذا يعني ان هناك  $m$  من الاحداثيات العامة

غير مستقلة وبالتالي  $n-m$  منها تعد متحولات مستقلة . وقبل اشتقاق معادلات لاغرانج لمثل هذه الجمل المعقدة يجب الإشارة الى ان معادلات القيود ( 34 ) تشكل جزءاً من معادلات الحركة ، والجزء الثاني هو معادلات لاغرانج التي مستقتها الآن .

إذا عدنا الى العلاقة ( 26 ) أمكن كتابتها على الشكل :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i'} - \sum_j m_j \vec{r}_j' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{أو :}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (35)$$

وهذه العلاقة عامة وتنطبق على الجمل البسيطة والمعقدة على حد سواء .

لنكن  $\vec{F}_j$  القوى المطبقة على الجلة و  $\Phi_i$  القوى العامة . ولنكن كذلك  $\delta r_j$  انتقالات افتراضية في الاحداثيات الديكارتية و  $\delta q_i$  الانتقالات الافتراضية الموافقة في الاحداثيات العامة . عندئذ يمكن كتابة العمل الافتراضي  $\delta W$  بطريقتين :

$$\delta W = \sum_i \Phi_i \delta q_i \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_j m_j \vec{r}_j'' \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \\ &= \sum_i \left[ \sum_j m_j \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta \dot{q}_i \\ &= \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta \dot{q}_i \end{aligned} \quad (37)$$

حيث استعملنا المعادلة ( 35 ) والملاقة

$$\vec{\delta r_j} = \sum_i \frac{\partial \vec{r_j}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (38)$$

وبمقارنة الملاقين ( 36 ) و ( 37 ) نجد

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \phi_i \right] \delta q_i = 0 \quad (39)$$

لو كانت جميع الاحداثيات  $q_i$  مستقلة لكنت الانتقالات الافتراضية  $\delta q_i$  مستقلة عن بعضها أيضاً ولأمكن عندئذ أن نقول ان الملاقة ( 39 ) تتحقق دوماً إذا كانت أمثال  $\delta q_i$  معدومة ، وعندئذ نحصل على معادلات لاغرانج لحالة الجمل البسيطة ( حيث هناك  $\delta q_i$  مستقلة جميعها بالفعل ) . أما في حالتنا الحاضرة ( للجملة المعقدة ) فالاحداثيات  $q_i$  ليست كلها مستقلة عن بعضها وبالتالي فان الانتقالات الافتراضية  $\delta q_i$  ليست جميعها مستقلة . ولذلك لايمكننا أن نقول ان جميع أمثالها معدومة .

ان الملاقات التي تربط بين الانتقالات الافتراضية تنتج من علاقات القيود ( 34 ) . ويمكن كتابة هذه الملاقات بشكل تفاضلي :

$$\left. \begin{aligned} \sum_i A_i ( q_k ) dq_i + A ( q_k ) dt &= 0 \\ \sum_i B_i ( q_k ) dq_i + B ( q_k ) dt &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_i R_i ( q_k ) dq_i + R ( q_k ) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

وإذا اعتبرنا هذه الملاقات ( أي هذه القيود ) في لحظة معينة أمكن اعتبار الزمن ثابتاً عندئذ وبالتالي  $dt = 0$  . وبالإضافة الى ذلك ، إذا اعتبرنا

العناصر التفاضلية في العلاقات كاتقالات افتراضية امكن استبدال  $d q_i$  بـ  $\delta q_i$  وعندئذ تأخذ العلاقات المذكورة الشكل الافتراضي الآتي :

$$\left. \begin{aligned} \sum_i A_i (q_k) \delta q_i &= 0 \\ \sum_i B_i (q_k) \delta q_i &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_i R_i (q_k) \delta q_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

لنضرب هذه العلاقات بالترتيب بالتتابع  $\lambda_1 (q_k)$  و  $\lambda_2 (q_k)$  و ... و  $\lambda_m (q_k)$  ولنجمع الناتج طرفاً إلى طرف . نحصل على العلاقة

$$\sum_i \left[ \lambda_1 (q_k) A_i (q_k) + \lambda_2 (q_k) B_i (q_k) + \dots + \lambda_m (q_k) R_i (q_k) \right] \delta q_i = 0 \quad (42)$$

وتسمى التتابع  $\lambda_i (q_k)$  ، حيث  $i = 1, 2, \dots, m$  ، بمضارب لاغرانج وهي قوابع للاحداثيات العامة جميعها ويجب تعيينها فيما بعد .

إذا طرحنا العلاقة ( 42 ) من العلاقة ( 39 ) نجد

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i \right] \delta q_i = 0 \quad (43)$$

حيث اسقطنا المتحولات  $q_k$  من التتابع للتبسيط فقط وحيث  $i = 1, 2, \dots, n$  .

قلنا سابقاً ان اتقالات الافتراضية  $\delta q_i$  ليست جميعها مستقلة عن بعضها بل هناك  $m$  اتقالات غير مستقل ويبقى  $(n - m)$  اتقال مستقل .  
لنكن  $\delta q_m, \delta q_{m+1}, \dots, \delta q_1$  هي الاتقالات الافتراضية غير المستقلة وعندئذ تكون الاتقالات المستقلة هي  $\delta q_n, \delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \dots, \delta q_{m+1}$  . لنختار قوابع لاغرانج  $\lambda_m$  و  $\lambda_{m+1}$  و  $\lambda_{m+2}$  و ... و  $\lambda_1$  بحيث تنقسم امثال الاتقالات

غير المستقلة في المعادلة (43) وعند ذلك يكون

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i = 0 \quad (44)$$

حيث  $i = 1, 2, \dots, m$  . وإذا أسقطنا الحدود المدومة من المعادلة (43) تصبح :

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i \right] \delta q_i = 0 \quad (45)$$

حيث : المجموع على  $i$  من  $i = m + 1$  الى  $n$  .

تمثل هذه العلاقة (  $n - m$  ) معادلة فيها (  $n - m$  ) متحول مستقل هي  $\delta q_i$  حيث (  $i = m + 1, m + 2, \dots, n$  ) ويجب ان تتحقق دائماً ومما كانت هذه التحولات المستقلة . لذلك يجب أن تكون جميع أمثال التحولات المستقلة مدومة . إذن :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i = 0 \quad (46)$$

حيث  $i = m + 1, m + 2, \dots, n$

واخيراً إذا تأملنا العلاقتين ( 44 ) و ( 46 ) أمكننا أن ندجها بملاقة واحدة هي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i = 0 \quad (47)$$

حيث  $i = 1, 2, \dots, n$

هذه هي معادلات لاغرانج من أجل الجمل الميكانيكية المقدة . تمثل هذه العلاقة  $n$  معادلة بـ  $n + m$  مجهول هي  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, q_1, q_2, \dots, q_n$  فاذا أضفنا اليها معادلات القيود وهي  $m$  معادلة يصبح مجموع المعادلات  $n + m$  وعدد المجهول  $n + m$  ايضاً . وحل المجموعة الناتجة يؤدي إلى معرفة الاحداثيات العامة  $q_i$  ومضارب لاغرانج . فهذه المجموعة هي إذن معادلات الحركة ، ونريد كتابتها بنية الوضوح والتلخيص .

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \Phi_i + \lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i + \dots + \lambda_m R_i \\
 \sum_i A_i \dot{q}_i + A &= 0 \\
 \sum_i B_i \dot{q}_i + B &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \sum_i R_i \dot{q}_i + R &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

واخيراً إذا كانت الجملة محافظة ، أو كانت القوى مشتقة من كمون ، فإن بإمكاننا أن تتبع طريقة مماثلة لتتي اتبعناها من أجل الجمل البسيطة في الفقرة السابقة وإن نكتب معادلات لاغرانج ( 47 ) بدلالة تابع لاغرانج  $L$  . وبالتالي تأخذ معادلات لاغرانج الشكل الذي تمثله المعادلة الأولى من المجموعة التالية :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i + \dots + \lambda_m R_i \\
 \sum_i A_i \dot{q}_i + A &= 0 \\
 \sum_i B_i \dot{q}_i + B &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \sum_i R_i \dot{q}_i + R &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

وهي معادلات الحركة لجملة ميكانيكية معقدة ( لاهولونومية ) محافظة .

#### IX - معادلات لاغرانج في حالة قوى نبضية :

لقد وجدنا فيما سبق من هذا الفصل معادلات لاغرانج عندما تكون القوى المؤثرة على الجملة مراقبة لها أثناء الحركة كلها . إلا أن هناك حالات

تطبق فيها القوة على الجلمة خلال فترة زمنية قصيرة جداً . مثال ذلك حالة جسم ساكن يمتطي دفعة باليد . فالقوى التي تبديها اليد الدافعة تطبق على الجسم فترة صغيرة فقط . ومثل هذه القوى تسمى بالقوى النبضية او النابضة . وهذه القوى تؤثر على الجلمة الميكانيكية المطبقة عليها فتكسبها تسارعاً وبالتالي وعندما ينتهي تأثيرها تكون الجلمة قد اتخذت وضعاً حركياً معيناً . ويمكنها بعد ذلك أن تتابع الحركة وربما تحت تأثير قوى أخرى غير نبضية . وبعبارة أخرى ان القوى النبضية تعطي للجلمة سرعة ابتدائية إذا كانت ساكنة قبل تطبيقها او تغير وضعها الحركي تغييراً مفاجئاً خلال فترة زمنية قصيرة جداً .

أثناء تطبيق القوى النبضية تكون الجلمة خاضعة لهذه القوى بالفعل ولذلك يمكن أن نبر عن معادلات الحركة أثناء هذه الفترة القصيرة بمعادلات لاغرانج بصورة عامة . أي

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \phi_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad (50)$$

فاذا كانت فترة تطبيق القوى النبضية  $\vec{F}_j$  هي  $\tau$  ( بين اللحظتين  $t = 0$  و  $t = \tau$  ) وأردنا أن نحصل على كل تأثير القوى خلال هذه الفترة فان من الواجب عندئذ ان تكامل العلاقة ( 50 ) بين  $0, \tau$  . اذن

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} dt - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} dt = \int_0^\tau \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt \quad (51)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right]_{t=\tau} - \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right]_{t=0} - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} dt = \sum_j \int_0^\tau \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt \quad (52)$$



فإذا كان  $\tau$  صغيراً جداً أمكن اعتبار  $\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$  ثابتاً خلال هذه الفترة وبالتالي فإن تكامل الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة يكتب :

$$\int_0^\tau \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt = \sum_i \left( \int_0^\tau \vec{F}_j dt \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_i \vec{J}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad (53)$$

حيث  $\vec{J}_j$  هو دفع القوة  $\vec{F}_j \dots$

إذا كانت الفترة  $\tau$  قصيرة جداً أي انتهت إلى الصفر فإن :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} dt = 0 \quad (54)$$

لأن  $\frac{\partial T}{\partial q_i}$  محدود، وذلك حسب نظرية هذا المعنى في الرياضيات التحليلية .  
 فإذا أخذنا نهاية طرفي العلاقة ( 52 ) آخذين بعين الاعتبار العلاقتين ( 53 ) و ( 54 ) فإننا نجد :

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right]_2 - \left[ \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right]_1 = \sum_j \vec{J}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad (55)$$

حيث يدل الدليل 1 على الحالة قبل تطبيق القوة النبضية والدليل 2 على الحالة بعد انتهاء تأثير تلك القوة ، وحيث  $\mathcal{F}_i$  هي بالترتيب الدفع العامة المرافقة للاحداثيات العامة .

وأخيراً لما كانت الاندفاعات العامة  $P_i$  تعطى بالعلاقة ( 6 ) فإن المعادلة ( 55 ) تأخذ الشكل

$$(P_i)_2 - (P_i)_1 = \sum_j \vec{J}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad (56)$$

وتعرف كل من الملاحظين المتكافئين ( 55 ) و ( 56 ) بمعادلات لاغرانج في حالة القوى النبضية . وتعطينا هذه المعادلات مقدار التغيرات في الاندفاعات العامة  $p_i$  الناتجة عن تطبيق القوى النبضية . فاذا كننا نعلم الاندفاعات الابتدائية  $(p_i)_1$  أمكننا معرفة  $(p_i)_2$  بعد انتهاء تأثير هذه القوى . وبعبارة أخرى ، ان هذه المعادلات تعطينا الوضع الحركي للجسم اذا كنا نعلم الوضع الحركي قبل تطبيق القوى النبضية . واعتباراً من هذا الوضع الجديد للحركة تتابع الجملة حركتها بتأثير قوى أخرى ( إذا وجدت ) خاضعة لمعادلات حركة أخرى غير المعادلات ( 56 ) ، وذلك وفق قانون نيوتن الثاني في التحريك .

\* \* \*

# الفصل الثالث عشر

## ميكانيك هاميلتون

- تابع هاميلتون
- معادلات هاميلتون
- تابع هاميلتون للجمل المحافظة
- الاحداثيات المتكئة
- المعادلات القانونية للحركة في حقل قوى مركزي
- الفراغ الطوري والاحداثيات الطورية
- نظرية ليوفيل
- الحساب التغيري
- مبدأ هاميلتون والفعل الاصغر
- التحويلات القانونية
- التوابع المولدة وشرط التحويلات القانونية
- معادلات هاميلتون وجاكوبي
- معترضات بواسون
- معادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون
- خواص معترضات بواسون
- التابعان المترافقان والتابعان المتبادلان



لقد عالجنا في الفصل السابق مسائل الميكانيك بطريقة مبنية على نظرية لاغرانج . وفي الفصل الحالي سنعالج تلك المسائل بطريقة اخرى اعم واوسع من سابقتها ( طريقة لاغرانج ) إلا أنها ذات صلة وثيقة بها . وتعرف هذه الطريقة بنظرية هاميلتون . وبالرغم من أن هذه النظرية تستخدم لحل المسائل الميكانيكية التقليدية فانها تقدم أسساً أكثر فائدة في مجالات أخرى كالفيزياء النووية والذرية وميكانيك الكم والميكانيك السماوي والميكانيك الاحصائي .

#### I — تابع هاميلتون :

لقد كان تابع لاغرانج اساسياً جداً في نظرية لاغرانج لصياغة معادلات الحركة بشكل رياضي بسيط . أما في نظرية هاميلتون فان هناك تابعاً ندعوه تابع هاميلتون ( أو الهاميلتوني ) لا يقل في أهميته عن تابع لاغرانج . ويعرف هذا التابع بالنسبة لمجموعة ميكانيكية بالعلاقة :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i q_i' - L \quad (1)$$

حيث  $L$  تابع لاغرانج لهذه الجملة ، و  $q_i$  احداثياتها المعممة و  $q_i$  سرعتها المعممة و  $p_i$  اندفاعاتها المعممة . ونظراً لارتباط  $L$  و  $q_i'$  بـ  $q_i$  فليس من الصعب عندئذ أن نرى امكانية التعبير عن  $H$  بدلالة  $q_i$  و  $p_i$  وكذلك الزمن  $t$  . ونستطيع لذلك أن نكتب :

$$H = H( p_i , q_i , t ) \quad (2)$$

حيث  $i = 1, 2, \dots, n$  وحيث  $n$  عدد درجات حرية المجموعة الميكانيكية أي عدد احداثياتها العامة الكافية لتحديد وضعها .

## II — معادلات هاميلتون :

ان التفاضل الكلي لتابع هاميلتون محسوباً من العلاقة ( 1 ) هو

$$dH = \sum_i p_i dq_i' + \sum_i q_i' dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i'} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3)$$

ذاك لأن  $L$  تابع لـ  $t$  بصورة عامة . كما أن لدينا

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i'} \quad (4)$$

ونجد منها ( راجع ميكانيك لاغرانج ) :

$$p_i' = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial L'}{\partial q_i'} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (5)$$

باستعمال العلاقتين ( 4 ) و ( 5 ) في العلاقة ( 3 ) تصبح الأخيرة

$$dH = \sum_i q_i' dp_i - \sum_i p_i' dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (6)$$

ومن جهة أخرى فاننا نستطيع أن نحصل على التفاضل الكلي لتابع هاميلتون من العلاقة ( 2 ) فنجد :

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (7)$$

وبمقارنة العلاقتين الأخيرتين ( 6 ) و ( 7 ) نجد :

$$\left. \begin{aligned} q_i' &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i' &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= - \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

وتسمى هذه المعادلات بمعادلات هاميلتون ، أو المعادلات القانونية للحركة .  
وتبين هذه العلاقات أن الاحداثيات المعممة  $q_i$  والاندفاعات المعممة  $p_i$  تلعب دورين متشابهين في الصياغة العامة لمبادئ الميكانيك .

### III — تابع هاميلتون للجمل المحافظة :

يمكن في الحالة العامة أن يكون تابع هاميلتون تابعاً ظاهراً بالنسبة للزمن  $t$  ، أي أن الزمن يظهر مباشرة في عبارة التابع الهاميلتوني . وفي حالات خاصة كثيرة يكون الهاميلتوني تابعاً مستتراً بالنسبة للزمن . ونستطيع عندئذ أن نبين أن تابع هاميلتون ثابت ويساوي الطاقة الكلية للجملة . ونكون في الوقت نفسه قد بينا أن الطاقة الكلية ثابتة أي أن الجملة محافظة . لهذا الفرض نمرود إلى العلاقة ( 6 ) ونكتبها من جديد على الشكل التالي :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i q'_i p'_i - \sum_i p'_i q'_i - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (9)$$

ثم باستعمال العلاقة الأخيرة من ( 8 ) نكتب

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (10)$$

وتعني هذه العلاقة ( 10 ) أن تبعية  $H$  للزمن هي فقط في ظهور  $t$  مباشرة في تابع لاغرانج  $L$  وبالتالي في تابع هاميلتون  $H$  ، وذلك لأن المشتق الكلي لـ  $H$  بالنسبة للزمن يساوي المشتق الجزئي لـ  $H$  بالنسبة للزمن أيضاً .  
إذا فرضنا الآن أن تابع لاغرانج  $L$  وبالتالي تابع هاميلتون  $H$  للجملة تابعان مستتران بالنسبة للزمن كان

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad (11)$$

أي أن تابع هاميلتون  $H$  ثابت تماماً . اذنب :

$$H = H_0 \quad \text{ثابت} \quad (12)$$

ولكي نبين أن هذا الثابت هو الطاقة الكلية للجسم نعود أولاً إلى العلاقة ( 1 ) التي تعرف التابع الهاميلتوني فنكتب

$$H = \sum p_i q_i' - L = \sum p_i q_i' - T + V \quad (13)$$

لكن  $p_i = \partial T / \partial q_i'$  حسباً رأينا سابقاً . وفي الجمل البسيطة ( الهولونومية ) تكون الطاقة الحركية  $T$  متجانسة من الدرجة الثانية بالنسبة للسرع الممثلة  $q_i'$  .

لنقف قليلاً هنا بنية تذكر بعض خواص التوابع المتجانسة . من خواص التوابع  $F(x, y, z, \dots)$  المتجانسة من الدرجة  $n$  أنها تحقق الخاصة الرئيسية :

$$a^n F(x, y, z, \dots) = F(ax, ay, az, \dots) \quad (14)$$

مهما كانت  $a$  . وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة لـ  $a$  نجد

$$n a^{n-1} F = \frac{\partial F}{\partial(ax)} \frac{d(ax)}{da} + \frac{\partial F}{\partial(ay)} \frac{d(ay)}{da} + \frac{\partial F}{\partial(az)} \frac{d(az)}{da} + \dots$$

$$= x \frac{\partial F}{\partial(ax)} + y \frac{\partial F}{\partial(ay)} + z \frac{\partial F}{\partial(az)} + \dots$$

وبجعل  $a = 1$  نجد

$$n F = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} + \dots \quad (15)$$

لنعد الآن إلى الطاقة الحركية للجسم البسيطة ، وهو كما سلف تابع متجانس من الدرجة الثانية بالنسبة لـ  $q_i'$  ، ولنطبق عليه الخاصة الأخيرة الممثلة بالمعادلة ( 15 ) فنجد :



$$\begin{aligned}
 2 T &= q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \dots + q'_n \frac{\partial T}{\partial q'_n} \\
 &= \sum_i q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_i q'_i p_i
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

إن استعمال العلاقة ( 16 ) في العلاقة ( 13 ) يعطي

$$H = 2T - T + V = T + V = E \tag{17}$$

وهكذا نكون قد برهننا على أنه إذا كان  $L$  (وبالتالي  $H$ ) تابعاً مستتراً بالنسبة للزمن فإن  $H$  ثابت ويساوي الطاقة الكلية ، أي أن هذه الطاقة ثابتة بدورها . وهذا يدل على أن الجملة محافظة . ونستطيع هنا أن نعتبر هذه الخاصة تعريفاً جديداً للجملة المحافظة فنقول : ان الجملة المحافظة هي التي يكون تابعها الهاميلتوني  $H$  مستتراً بالنسبة للزمن  $t$  ، أي التي تحقق الشرط  $\partial L / \partial t = 0$  أو  $\partial H / \partial t = 0$  . ثم إن ما تقدم هنا في هذه الفترة ذو فائدة كبرى في التعبير عن الهاميلتوني وبالتالي عن المعادلات القانونية للحركة ، كما سنرى .

#### IV — الاحداثيات المتكورة :

يقال عن الاحداثي  $q_j$  انه احداثي متكرر (أو مستتر) إذا لم يظهر مباشرة في تابع لاغرانج وبالتالي في تابع هاميلتون ، أي إذا حقق الشرط التالي :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \tag{18}$$

ويكون عندئذ

$$p_i = (p_i)_0 \quad \text{ثابت} \tag{19}$$

وهذا يدل على أن الاندفاعات المرافقة للاحداثيات المتكورة هي تكاملات للحركة أو ثوابت للحركة . والعلاقة ( 19 ) تمثل إحدى معادلات الحركة .

## V — المعادلات القانونية للحركة في حقل قوى مركزي :

جسيم مادي كتلته  $m$  يتحرك -نفاضاً- لحقل قوى مركزي  $\vec{F}$  كونه  $V$  .  
والمطلوب هو حساب تابع هاميلتون لهذا الجسيم ، ثم استخراج المعادلات  
القانونية لحركته (معادلات هاميلتون) .

بما أن الحركة خاضعة لقوة مركزية فان المسار مستوي . ويتبين هذا  
المستوي بشعاعي السرعة، الابتدائية والقوة . ويتبين وضع الجسيم في هذا  
المستوي باحداثيه القطبيين  $(r, \theta)$  ، أي  $q_1 = r$  و  $q_2 = \theta$  والاندفاعان  
المرافقان لهذين الاحداثيين هما  $p_1 = p_r$  و  $p_2 = p_\theta$  .  
تمطى الطاقة الحركية في الاحداثيات القطبية ب :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \theta'^2) \quad (20)$$

ويكون تابع لاغرانج عندئذ

$$L = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \theta'^2) - V(r) \quad (21)$$

ويكون الاندفاعان المعمان :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'} = \frac{\partial L}{\partial r'} = m r' \quad (22)$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{\partial L}{\partial \theta'} = m r^2 \theta' \quad (23)$$

بحيث ان العلاقتين الأخيرتين تعطيان :

$$r' = p_r / m \quad \text{و} \quad \theta' = p_\theta / m r^2 \quad (24)$$

ويكون تابع هاميلتون عندئذ :

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n p_i q_i' - L \\ &= p_r r' + p_\theta \theta' - \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \theta'^2) + V(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_r \left( \frac{p_r}{m} \right) + p_\theta \left( \frac{p_\theta}{mr^2} \right) - \frac{1}{2} m \left( \frac{p_r}{m} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{p_\theta}{mr^2} \right)^2 + V(r) \\
&= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + V(r) \quad (25)
\end{aligned}$$

حيث استعملنا العلاقتين (24) .

أما المعادلات القانونية للحركة فنتج من تطبيق المعادلات (8) أي :

$$\left. \begin{aligned}
r' &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\
\theta' &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\
p_r' &= - \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \\
p_\theta' &= - \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (26)$$

لاحظ أن المعادلتين الأوليين من (26) تكافئان المعادلتين (24) .

## VI — الاحداثيات الطورية والفراغ الطوري :

ان الصياغة الهاميلتونية للميكانيك تقدم تشابهاً صريحاً بين الاحداثيات المعممة  $q_i$  والاندفاعات المعممة  $p_i$  . نسمي الأولى منها  $(q_i)$  بالاحداثيات الموضعية ، كما نسمي الثانية  $(p_i)$  بالاحداثيات الاندفاعية . ومن المفيد في كثير من الأحيان أن نتصور فراغاً ذا  $(2n)$  بعداً تمثله هاتان المجموعتان من الاحداثيات الموضعية والاندفاعية ، إذ تتميز عندئذ كل نقطة من هذا الفراغ باحداثياتها

$$q_1 , q_2 , q_3 , \dots , q_n , p_1 , p_2 , p_3 , \dots , p_n$$

يسمى هذا الفراغ بالفراغ الطوري ذي الأبعاد  $(2n)$  ، كما نسميه أحياناً بالفراغ الطوري  $(qp)$  . كما نسمي هذه المجموعة من الاحداثيات بالاحداثيات الطورية . والمدير بالذكر والملاحظة هو أن تعيين الوضع الحركي للجلمة الميكانيكية المدروسة في لحظة ما  $t$  ( أي تعيين احداثياتها الموضعية والاندفاعية ) يؤدي الى معرفة احداثيات نقطة مقابلة من الفراغ الطوري . وبالمكس ، فإن كل نقطة من الفراغ الطوري تعين الوضع الحركي للجلمة الميكانيكية في لحظة ما  $t$  . فمتىما تتحرك الجلمة الميكانيكية في الفراغ العادي ( الديكارتي ) ذي الأبعاد الثلاثة فإن النقطة الطورية الممثلة لوضع الجلمة تتحرك في الفراغ الطوري وترسم "منحنياً" ممطى بمعادلات هاميلتون ( المعادلات القانونية للحركة ) التي استخرجناها في مطامع هذا الفصل .

## VII — نظرية ليوفيل :

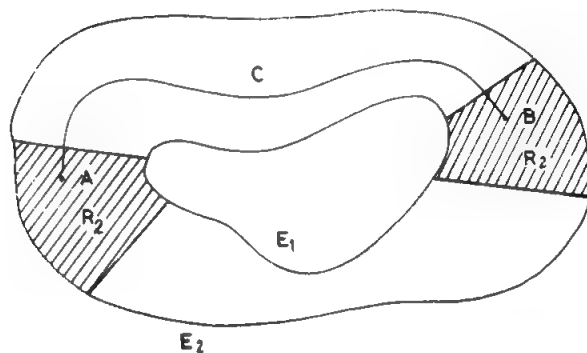
نعتبر مجموعة كبيرة جداً من جمل ميكانيكية محافظة تنصف بأن لها تاباً هاميلتونياً واحداً . فتابع هاميلتون هذا ثابت لأن جميع الجمل محافظة ويساوي الطاقة الكلية ، أي

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = E \quad (27)$$

ولا يظهر الزمن في هذه المعادلة لأن الهاميلتوني في الجمل المحافظة هو تابع مستتر بالنسبة للزمن . إن المعادلة ( 27 ) وأمثالها تمثل سطوحاً في الفراغ الطوري . لنفرض الآن أن الطاقات الكلية الثابتة لهذه الجمل كلها محصورة بين  $E_1$  و  $E_2$  . وعندئذ فإن انتقال الجمل من أوضاع الى أخرى يمثل انتقال النقاط الممثلة لها في الفراغ الطوري بين "سطحين" تمثلها المعادلتان

$$\left. \begin{aligned} H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= E_1 \\ H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= E_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

وذلك كما يبين الشكل الرمزي (1) . ويجب ألا يغيب عن الذهن أن مفهوم السطح في الفراغ الذي أبعاده أكثر من ثلاثة يختلف عن مفهوم السطح الهندسي المعروف في الفراغ ثلاثي الأبعاد .



الشكل (1)

بما أن للجمل الميكانيكية المتحركة شروط بدء مختلفة في الفراغ الطوري فإنها تتحرك وفق «ممرات» مختلفة في ذلك الفراغ . لتصور أن الأوضاع الابتدائية واقعة في المنطقة  $R_1$  من الفراغ الطوري (أي أن النقاط الطورية الممثلة للأوضاع الابتدائية للجمل واقعة في المنطقة  $R_1$ ) وأن أوضاعها الجديدة بعد مضي فترة زمنية  $t$  واقعة في المنطقة  $R_2$  من الفراغ الطوري . فكل نقطة من النقاط الممثلة للجمل ، مثل النقطة A تتحرك راسمة مساراً «ممرأ» في الفراغ الطوري مثل C منتقلة إلى B من المنطقة  $R_2$ ، حيث A وضع هذه النقطة في لحظة البدء  $t_1$  و B وضعا في اللحظة  $t_2 = t_1 + t$  . ونختار  $R_1$  و  $R_2$  بحيث يحتويان على جميع النقاط الممثلة للجمل في اللحظة  $t_1$  واللحظة  $t_2$  بالترتيب . وهذا يدل على أن عدد النقاط الممثلة للجمل واحد في كل من المنطقتين .

تنص نظرية ليوفيل على أن «الحجمين»  $R_1$  و  $R_2$  متساويان . وبكافي،

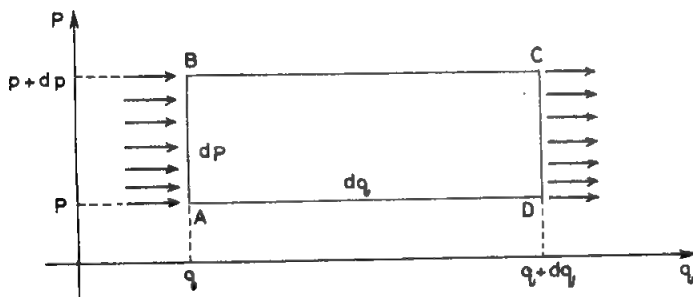
ذلك قولنا إن كثافة النقاط الممثلة (عدد النقاط في واحدة الحجم) واحدة في  $R_1$  و  $R_2$  . ونستطيع أن نعمم نص هذه النظرية بقولنا :  
 « أن كثافة النقاط الممثلة للجمل في الفراغ الطوري تبقى ثابتة اثناء حركة هذه الجمل في الفراغ العادي » .

قبل أن نأتي على برهان هذه النظرية بصورة عامة سنمهد أولاً بالبرهان عليها في حالة بسيطة حين تكون لكل جملة من هذه الجمل درجة حرية واحدة ، ونستنتج بعد ذلك البرهان العام .

### ٢ - حالة درجة حرية واحدة :

في هذه الحالة ، تتميز كل جملة باحداثي  $q$  واندفاع  $p$  ويتميز الفراغ الطوري عندئذ ببعدين فقط هما  $p$  و  $q$  . والمنصر « الحجمي » الطوري  $dR$  يؤول عندئذ إلى سطح قدره  $dq dp$  كما يبين الشكل ( 2 ) .

لتكن  $\varrho(q, p, t)$  كثافة النقاط الطورية الممثلة في الموضع  $(q, p)$  واللحظة  $t$



الشكل ( 2 )

ان السرعة التي تدخل بها النقاط الممثلة من الوجه  $AB$  هي  $q' = \frac{dq}{dt}$

ويكون عدد النقاط التي تجتاز  $AB$  خلال الفترة الزمنية  $dt$

$$N_{AB} = \varrho q' dp \quad (29)$$

وعدد النقاط التي تخرج مجتازة CD

$$N_{CD} = \left\{ (e q') + \frac{\partial}{\partial q} (e q') dq \right\} dp \quad (30)$$

حيث استعملنا دستور التزايدات المحدودة كتقريب مقبول للحصول على قيمة جداء الكثافة بالسرعة عند الوجه CD حسب العلاقة :

$$y(x + dx) = y(x) + \frac{\partial}{\partial x} y(x) dx$$

ولذلك فالمقدار داخل المعترضة يمثل قيمة الجداء  $eq'$  عند الوجه CD . الفرق بين  $N_{AB}$  و  $N_{CD}$  يمثل عدد النقاط التي تدخل من AB ولا تخرج من CD أي :

$$dN_1 = N_{AB} - N_{CD} = - \frac{\partial}{\partial q} (eq') dq dp \quad (31)$$

بطريقة مماثلة تماماً نبرهن ان عدد النقاط الممتلة التي تدخل الوجه AD ولا تخرج من BC يساوي

$$dN_2 = N_{AD} - N_{BC} = - \frac{\partial}{\partial q} (ep') dq dp \quad (32)$$

وبذلك يكون العدد الكلي للنقاط التي تدخل السطح  $dq dp$  ولا تخرج منه مساوياً

$$dN = dN_1 + dN_2 = - \left[ \frac{\partial}{\partial p} (eq') + \frac{\partial}{\partial p} (ep') \right] dq dp \quad (33)$$

من جهة أخرى فان هذا العدد يساوي التغير الذي يطرأ على العدد N بين اللحظتين  $t$  و  $t + dt$  ، أي

$$dN = \frac{\partial N}{\partial t} dt \quad (34)$$

ومن العلاقاتين الاخبريتين (33) و (34) نستنتج أن

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} (e q') + \frac{\partial}{\partial p} (e p') = 0 \quad (35)$$

ونشر أقواس هذه العلاقة يعود الى

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q} q' + \frac{\partial \rho}{\partial p} p' \right] + e \left[ \frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial p'}{\partial p} \right] = 0$$

أو

$$\frac{d\rho}{dt} + e \left[ \frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial p'}{\partial p} \right] = 0 \quad (36)$$

لكن معادلات هاميلتون (8) تعطي

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \\ \frac{\partial p'}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

وأخيراً وباستعمال (37) في (36) نجد أن

$$e = \text{ثابت} \quad \text{أو} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (38)$$

فالكثافة  $\rho$  ثابتة وهو ما كنا نريد الوصول إليه .

(ب) الحالة العامة :

نمود الآن الى الحالة العامة حيث لاجملة  $n$  درجة حرية ، وحيث يكون  
عنصر الحجم ، في الفراغ الطوري

$$dv = dq_1 \cdot dq_2 \dots dq_n \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dp_n \quad (39)$$

ليس من الصعب ان نذكر ان تغير كثافة النقاط المثلة خلال التغير الزمني  
 $dt$  هو  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  وان تغير العدد الكلي للنقاط المثلة خلال هذه الفترة هو :

$$dN = \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (40)$$



ومن جهة أخرى ليس صعباً ان نعمم العلاقة (33) لنجد ان هذا التغير يساوي

$$dN = - \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (eq'_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (eq'_2) + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} (eq'_n) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial p_1} (ep'_1) + \frac{\partial}{\partial p_2} (ep'_2) + \dots + \frac{\partial}{\partial p_n} (ep'_n) \right] dv$$

أو :

$$dN = - \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} (eq'_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} (ep'_i) \right] dv \quad (41)$$

وتمطي المعادلتان (40) و (41)

$$\frac{d}{dt} e + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} (eq'_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} (ep'_i) = 0 \quad (42)$$

ويقود انجاز الاشتقاق الجزئية في العلاقة الأخيرة إلى

$$\left[ \frac{d}{dt} e + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} (eq'_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} (ep'_i) \right] + e \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} + \frac{\partial p'_i}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (43)$$

وزى ان المعترضة الأولى في هذه العلاقة تمثل المشتق الكلي لـ  $e$  أي  $\frac{d}{dt} e$  وأن المعترضة الثانية معدومة لأن

$$\frac{\partial q'_i}{\partial q_i} + \frac{\partial p'_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

وذلك بالاستعانة بمعادلات هاميلتون التي أنف ذكرها . وأخيراً فان استعمال الحقيقتين الأخيرتين في العلاقة (43) يردّها الى الشكل البسيط

$$e = \text{ثابت} \quad \text{أو} \quad \frac{d}{dt} e = 0$$

فكثافة النقاط الممثلة لأوضاع الجمل الحركية في الفراغ الطوري تبقى ثابتة أثناء انتقال هذه الجمل في الفراغ العادي ، وذلك عندما تكون الجمل

محافظة ولها شكل هاميلتوني واحد وعدد واحد  $n$  من درجات الحرية .

### VIII — الحساب التغيري :

من القضايا التي تبرز أحياناً في الرياضيات والفيزياء قضية إيجاد منحن  $C$  ، أي إيجاد معادلته  $y = g(x)$  ، يصل بين نقطتين  $A$  و  $B$  فاصلتهما على الترتيب  $a$  و  $b$  بحيث يكون التكامل المنحني لتابع ما  $F(x, y, y')$  على هذا المنحني  $G$  بين النقطتين  $A$  و  $B$  أصغرياً أو أعظمية ، أي بحيث يكون التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (44)$$

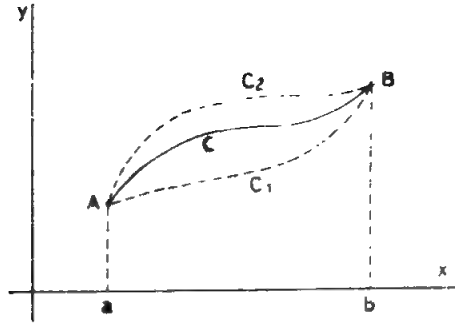
أعظمية أو أصغرياً « أحياناً نقول مستقراً » ، حيث  $y' = dy/dx$  و  $F$  هو تابع ما معين ومعروف سلفاً . ويقال عن المنحني  $C$  الذي نجده أنه المنحني الحدي « أو منحني الاستقرار » بالنسبة لهذا التكامل .

سنبرهن بعد قليل على أنه لكي يكون إيجاد هذا المنحني  $C$  ممكناً يجب أن يحقق التابع  $F(x, y, y')$  الشرط التالي :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (45)$$

يطلق على هذه العلاقة اسم « معادلة أولير » أحياناً ومعادلة « لاغرانج » أحياناً أخرى . ومنطلق عليها للانصاف اسم « معادلة أولير - لاغرانج » . ان هذه القضية وقضايا أخرى مشابهة تنتمي إلى حقل رياضي خاص نسميه « الحساب التغيري » أو « حساب التغيرات » .

لنعد الآن إلى معادلة أولير - لاغرانج ونبين ضرورة تحققها كشرط لامكانية إيجاد منحن  $C$  يحمل التكامل  $I$  في العلاقة (44) مستقراً أي ذا قيمة عظمى أو صغرى بالنسبة لجميع التكاملات الأخرى لتابع  $F$  ذاته على جميع المنحنيات الأخرى الممكنة بين  $A$  و  $B$  . لنفرض أن المنحني الذي يحمل التكامل  $I$  مستقراً هو المنحني  $C$  المبين في الشكل (2) والذي معادلته



الشكل ( 2 )

$$y = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

ولنختار قابلاً آخر لـ  $x$  مثل  $\eta(x)$  بحيث ينعدم عندما  $x = a$  و  $x = b$  .  
أي :

$$\eta(a) = 0 \quad \eta(b) = 0$$

وليكن  $\varepsilon$  مقداراً صغيراً بقدر ما نرغب . عندئذ يكون المنحني  $C_1$  الذي يمثله التابع

$$y = f(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (46)$$

مجاوراً لـ  $C$  . فإذا حسبنا التكامل (44) على المنحني  $C_1$  كانت النتيجة كالتالي :

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx \quad (47)$$

وحتى يكون هذا التكامل مستقرارياً عند  $\varepsilon = 0$  يجب أن يكون

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (48)$$

ان  $\epsilon$  تظهر في  $F$  وبالتالي في التكامل عن طريق

$$y = b + \epsilon \eta, \quad y' = b' + \epsilon \eta' \quad (49)$$

ولذلك يأخذ الشرط (48) الشكل الجديد

$$\frac{\partial I(\epsilon)}{\partial y} \frac{d y}{d \epsilon} + \frac{\partial I(\epsilon)}{\partial y'} \frac{d y'}{d \epsilon} = 0$$

وبتطبيق هذه النتيجة على التكامل (47) نجد

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0$$

وحساب التكامل بالتجزئة يقود الى العلاقة

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx = 0 \quad (50)$$

ان الحد الأول من التكامل الأخير معدوم لأن  $\eta(b) = 0, \eta(a) = 0$  حسباً فرضنا سابقاً . ويبقى

$$\int_a^b \eta \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx = 0 \quad (51)$$

لكن التابع  $\eta$  اختياري الى حد كبير ؛ إذ أن الشرط المفروض عليه لا يتعدى انعدامه عند  $x = a$  و  $x = b$  . وهناك عدد لانهاية له من التوابع التي تحقق هذا الشرط . وإذا لاحظنا أن الشرط (51) يجب أن يتحقق مهما كان التابع  $\eta(\epsilon)$  ادركنا عندئذ أنه يجب أن يكون

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

أو :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

وهو الشرط الذي كنا نسمي نمو البرهان على وجوب تحققه .  
ان هذه النتيجة يمكن أن تعمم فتشمل تكاملات من الشكل

$$\int_a^b F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, y_n, y_n') dx \quad (53)$$

حيث يمكن إيجاد منحنيات  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  تجمل هذا التكامل (53) استقرارياً على كل منها إذا تحققت الشروط

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_1} - \frac{\partial F}{\partial y_1} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_n} - \frac{\partial F}{\partial y_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

او بشکل مختزل

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (55)$$

لنعد الآن إلى التكامل  $I(\epsilon)$  ولنشره بجوار  $\epsilon=0$  حسب سلسلة تايلور

$$I(\epsilon) = I(0) + \epsilon \left[ \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \left[ \frac{d^2 I(\epsilon)}{d\epsilon^2} \right]_{\epsilon=0} + \dots$$

$$= I(\omega) + \varepsilon \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx$$

( حدود من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة لـ  $\varepsilon$  ) +  
ويكتب ذلك بالشكل

$$\frac{I(\epsilon) - I(0)}{\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \quad (56)$$

(حدود من الدرجة الأولى كما فوق بالنسبة لـ  $\epsilon$ )  
وتدل هذه العلاقة على أن التكامل الموجود في الطرف الأيمن منها يساوي تغير التكامل  $I(\epsilon)$  الذي يعبر عنه الطرف الأيسر . ونكتب هذا التغير بالشكل

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') dx$$

ولقد رأينا أن هذا التغير يجب أن ينعدم كشرط أساسي لاستقرار التكامل .  
ان شرط الاستقرار هذا يأخذ إذن الشكل الجديد

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') dx = 0 \quad (57)$$

### IX — مبدأ هاميلتون ( مبدأ الفعل الأصغر ) :

ان الشبه الشديد بين المعادلات (54) ومعادلات لاغرانج للجمل  
المحافظة يجعلنا نعتبر مسألة إيجاد منحنيات الاستقرار للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q'_1, q_2, q'_2, \dots, q_n, q'_n) dt \quad (58)$$

حيث  $L$  هو تابع لاغرانج لجملة محافظة احداثياتها المعممة هي  $q_i$  وسرعتها المعممة  $q'_i$  .  
وزى استناداً إلى ما تقدم في الفقرة السابقة وجوب تحقق الشروط

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (59)$$

وهذه المعادلات هي فعلاً معادلات لاغرانج للجمل المحافظة التي رأيناها في  
الفصل السابق واستخرجناها بطريقة مختلفة .

لقد قادت هذه النتيجة هاميلتون إلى وضع مبدئه التالي :

« ان الجملة الميكانيكية المحافظة تتحرك بين الحظتين  $t_1$  و  $t_2$  بحيث يكون

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt \text{ اكامل استقرارياً } .$$

يطلق على هذا التكامل اسم « تكامل الفعل » . ولما كان هذا التكامل أصغرياً في معظم الحالات فان هذا المبدأ يطلق عليه أحياناً اسم « مبدأ هاميلتون للفعل الأصغر » أو اختصاراً « مبدأ الفعل الأصغر » . ويمبر عن هذا المبدأ بالشكل الرياضي

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (60)$$

حيث  $\delta$  رمز التنغير .

ونشير أخيراً الى ان بعض المراجع تستخرج معادلات لاغرانج باستعمال مبدأ هاميلتون وحساب التنغير الأخير ( 60 ) الذي يقود مباشرة الى المعادلات المنشودة .

### X — التحويلات القانونية :

ان سهولة معالجة كثير من المسائل الميكانيكية أمر منوط بمحسن اختيار الاحداثيات المعممة التي تستعمل في المسألة . ولذا فان من المرغوب فيه أن نعالج التحويلات من مجموعة من الاحداثيات المعممة الى مجموعة أخرى . فاذا اعتبرنا مجموعة الاحداثيات المعممة الموضعية  $q_i$  والاندفاعية  $p_i$  كمجموعة أولى ( أو قديمة ) واعتبرنا مجموعة أخرى ( جديدة ) من الاحداثيات المعممة الموضعية  $Q_i$  والاندفاعية  $P_i$  ، فان الانتقال من المجموعة القديمة الى المجموعة الجديدة يتم وفق علاقات تحويل من الشكل

$$Q_i = Q_i ( q_1 , q_2 , \dots , q_n , p_1 , p_2 , \dots , p_n , t ) \quad (61)$$

$$P_i = P_i ( q_1 , q_2 , \dots , q_n , p_1 , p_2 , \dots , p_n , t ) \quad (62)$$

حيث  $i$  تأخذ جميع القيم الممكنة من 1 الى  $n$  وحيث  $n$  عدد الاحداثيات الموضعية في كل من المجموعتين . ونستطيع ان نختزل علاقات التحويل هذه على النحو التالي

$$Q = Q ( q , p , t ) \quad (63)$$

$$P = P ( q , p , t ) \quad (64)$$

وتعني هاتان المادتان ان كلا من الاحداثيات الجديدة يمكن أن تكون تابعة لجميع الاحداثيات القديمة وللزمن .

سنقتيد بنوع واحد من هذه التحويلات ندعوه بالتحويلات القانونية ، وهي التي يوجد من أجلها تابع هاميلتوني للاحداثيات الجديدة

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} ( Q_1 , Q_2 , \dots , Q_n , P_1 , P_2 , \dots , P_n , t ) \quad (65)$$

او بصورة مختزلة

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} ( Q , P , t ) \quad (66)$$

بحيث يكون

$$Q'_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{و} \quad P'_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad (67)$$

وفي مثل هذه الحالة ندعو الاحداثيات  $Q_i$  و  $P_i$  بالاحداثيات القانونية .

ان تابعي لاغرانج  $L ( q , p , t )$  في المجموعة القديمة و  $L ( Q , P , t )$  في المجموعة الجديدة يرتبطان بتابعي هاميلتون في هاتين المجموعتين وفق الملاحظتين التاليتين :

$$H = \sum_i p_i q'_i - L \quad \text{و} \quad \mathcal{H} = \sum_i P_i Q'_i - \mathcal{L} \quad (68)$$



حيث يؤخذ المجموع على جميع الاحداثيات الموافقة لقيم الدليل  $i$  من 1 إلى  $n$  . فالتابع الهاميلتوني شكل واحد في الجملتين القديمة والجديدة .

### XI — التابع المولدة وشرط التحويلات القانونية :

يمكننا ان نبين الآن أن التحويل يكون قانونياً إذا وجد تابع  $G$  ندعوه بالتابع المولد بحيث يحقق العلاقة

$$\frac{dG}{dt} = L - \mathcal{L} \quad (69)$$

فحسب مبدأ هاميلتون يجب ان يكون

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{و} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (70)$$

ونجد من ذلك أيضاً أن

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L}) dt = 0 \quad (71)$$

وهذه العلاقة لا تعني أن  $L = \mathcal{L}$  وإنما تعني أن أحد هذين التابعين يختلف عن الآخر بمقدار هو المشتق الزمني  $\frac{dG}{dt}$  لتابع ما  $G$  ، حيث تصبح العلاقة الأخيرة عندئذ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt} dt = \delta [ G(2) - G(1) ] = 0 \quad (72)$$

وذلك لأن التغيرات تنعدم عند النقطتين المتطرفتين للتكامل ، إذ نلاحظ أن  $G(2) - G(1)$  مقدار ثابت تغيره معلوم . إذن ، إذا وجد تابع مثل  $G$  بحيث أن مشتقه يحقق العلاقة (69) فإن التحويل من المجموعة القديمة إلى المجموعة الجديدة يكون قانونياً .

ويبرهن كذلك ان التحويل يكون قانونياً إذا كان

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i = \text{تفاضلاً تاماً} \quad (73)$$

وكثيراً ما يكون استعمال هذه الخاصة للبرهان على أن تحويلاً ما هو قانوني أسهل من اتباع طريقة التابع المولد .  
لنفرض الآن أن هناك قابلاً مولداً

$$C = G ( q_i , Q_i , t ) \quad (74)$$

للأحداثيات الموضعية القديمة والجديدة والزمن . ولنفاضل هذا التابع بالنسبة للزمن ، حيث نجد

$$dG = \sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial G}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial G}{\partial t} dt \quad (75)$$

واضافة إلى ذلك فإن التابع  $G$  يحقق العلاقة (69) أي

$$dG = (L - \mathcal{H}) dt = \left[ \sum_i p_i q'_i - H - \sum_i P_i Q'_i + \mathcal{H} \right] dt \\ = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (\mathcal{H} - H) dt \quad (76)$$

وتؤدي مقارنة الملتين (75) و (76) إلى ما يلي

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \text{و} \quad P_i = - \frac{\partial G}{\partial Q_i} \quad \text{و} \quad \mathcal{H} - H = \frac{\partial G}{\partial t} \quad (77)$$

ولما كان  $\mathcal{H}$  هو الهاملتوني في مجموعة الأحداثيات الجديدة فإن

$$P'_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad \text{و} \quad Q'_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \quad (78)$$

وهكذا نجد أننا ولدنا من التابع  $G$  الاندفاعات القديمة  $p_i$  والاندفاعات الجديدة  $P_i$  ، كما تبين العلاقات (77) . وفي حالات أخرى للتتابع المولدة تتبع طريقة مماثلة لتوليد الأحداثيات التي لا تظهر في التابع المولد .

## XII — معادلة هاميلتون — جاكوبي :

إذا تمكنا من إيجاد تحويل قانوني يقود إلى أن

$$\mathcal{H} \equiv 0$$

فاننا نرى من العلاقات (78) أن الاحداثيات الجديدة  $P_i$  و  $Q_i$  كلها ثابتة . وهذا يعني أن هذه الاحداثيات هي احداثيات متكررة . ونستطيع عندئذ بواسطة التحويل أن نجد الاحداثيات الطورية  $p_i$  و  $q_i$  ونعين حركة المجموعة . ويتوقف الأمر على إيجاد التابع المولد المناسب . فمن المعادلة (77) وبوضع  $\mathcal{H} \equiv 0$  نجد ان التابع المولد  $G$  يجب ان يحقق المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(p_i, q_i, t) = 0 \quad (79)$$

أو

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \quad (80)$$

وهذه العلاقة التفاضلية الجزئية هي ما يسمى بمعادلة هاميلتون - جاكوبي .

ولكي نحقق غايتنا يجب إيجاد حل هذه المعادلة وإيجاد التابع  $G$  . ولما كانت هذه المعادلة تحتوي على  $n + 1$  متحولاً مستقلاً هي  $q_1, q_2, \dots, q_n, t$  فإن الحل الكامل لهذه المعادلة يتضمن  $n + 1$  ثابتاً كيفياً . وبإسقاط أحد هذه الثوابت بسبب خاصة التجميعية فإن الثوابت المتبقية كلها غير تجميعية . وبالتالي يكون الحل بدلالة  $n$  من الثوابت  $\beta_i$  حيث  $i = 1, 2, \dots, n$  . إذن

$$G = G(q_1, q_2, \dots, q_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t) \quad (81)$$

وعندما يتوفر هذا الحل فاننا نحصل على الاحداثيات الاندفاعية القديمة من العلاقات

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (82)$$

إذا أدركنا أن الثوابت  $\beta_i$  تقوم مقام الاندفاعات الجديدة  $P_i$  كان عندئذ

$$Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i} = \frac{\partial G}{\partial \beta_i} = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (83)$$

علماً بأن  $\gamma_i$  ثوابت ، حيث سبق أن قلنا إن  $Q_i$  و  $P_i$  كلها ثوابت . وباستعمال

المعادلات. (83)، وعددها  $n$  وتحوي  $n$  متحولاً مستقلاً هي  $q_i$ ، نستطيع أن نجد جميع هذه التحولات  $q_i$  كتتابع بدلالة  $\beta_i$  و  $\gamma_i$  و  $t$ . وهذه الاحداثيات بدورها تبين الحركة تمام التمين.

### XIII — معترضات بواسون :

ان المعادلات القانونية للحركة صيغة أخرى بدلالة ما يسمى « بمعترضات بواسون » وتتميز هذه الصيغة بالاختصار الشكلي لهذه المعادلات من جهة، وبتطبيقاتها في ميكانيك الكم بصورة خاصة من جهة أخرى.

لتعريف هذه المعترضات، نفرض فراغاً طورياً احداثياته  $q_i$  و  $p_i$  ونفرض تابعين  $F$  و  $G$  لجميع هذه الاحداثيات الطورية بصورة عامة. نسمي معترضة بواسون لهذين التابعين وزمراً لها بالرمز  $[F, G]$  المجموع التالي :

$$[F, G] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) \quad (84)$$

حيث للترتيب بين  $G, F$  وبين  $p_i$  و  $q_i$  في الاشتقاق أهمية يجب الانتباه إليها.

### XIV — معادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون :

لنحسب الآن معترضتي بواسون للهاميلتوني  $H$  وكل من الاحداثيات الموضعية  $q_i$  والاندفاعية  $p_i$  أي  $[H, q_i]$  و  $[H, p_i]$ .

$$[H, q_i] = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right) \quad (85)$$

فاذا لاحظنا أن  $\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0$  و  $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = 0$  من أجل  $j \neq i$

و  $1 = \frac{\partial q_i}{\partial q_i}$  واستعملنا معادلات هاميلتون  $q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  واستعملنا كل

ذلك في العلاقة (85) وصلنا إلى ما يلي :

$$\left. \begin{aligned} [H, q_i] &= q'_i \\ [H, p_i] &= p'_i \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

حيث نحصل على العلاقة الثانية بطريقة مماثلة . وتمثل هذه العلاقات الشكل الجديد لمعادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون لهاميلتوني الجلة مع الاحداثيات الطورية .

#### XV — خواص معترضات بواسون :

تحقق معترضات بواسون مجموعة الخواص التالية التي نترك للطلاب التحقق من صحتها وذلك بالتعويض المباشر ونفرض في كل ذلك استعمال قواعد الاحداثيات الطورية  $q_i, p_i$  .

$$[F, G] = -[G, F] \quad (87)$$

$$[F, C] = 0 \text{ , ثابت } C \quad (88)$$

$$[F, G_1 + G_2] = [F, G_1] + [F, G_2] \quad (89)$$

$$[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G] \quad (90)$$

$$[F, G_1 G_2] = [F, G_1] G_2 + [F, G_2] G_1 \quad (91)$$

$$[F_1 F_2, G] = [F_1, G] F_2 + [F_2, G] F_1 \quad (92)$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \text{ , } \forall i, j \quad (93)$$

$$[q_i, p_j] = [p_j, q_i] = 0 \quad i \neq j \quad (94)$$

$$[q_i, p_i] = -1 \quad (95)$$

$$[p_i, q_i] = 1 \quad (96)$$

$$[H, F] = F' = \frac{dF}{dt} \quad (97)$$

ومن هذه الخاصة نتيج معادلات الحركة

$$[H, q_i] = q_i' \quad \text{و} \quad [H, p_i] = p_i' \quad (98)$$

$$[F, q_i] = \partial F / \partial p_i \quad (99)$$

$$[F, p_i] = -\partial F / \partial q_i \quad (100)$$

#### XVI — التابعان المترافقان والتابعان المتبادلان :

نقول عن التابعين  $F, G$  إنها مترافقان فيما إذا كان  $[F, G] = \pm 1$ . ونلاحظ بصورة خاصة أن  $q_i$  و  $p_i$  مترافقان لأن  $[p_i, q_i] = 1$  و  $[q_i, p_i] = -1$ . كما أن الهاميلتوني  $H$  والزمن  $t$  مترافقان لأن  $[H, t] = 1$ .

ونقول عن التابعين  $F, G$  أنها متبادلان فيما بينها إذا تحقق الشرط  $[F, G] = [G, F] = 0$ . إلا أن الخاصة الأولى (97) من خواص مترضات بواسون تبين أن

$$[F, G] = -[G, F]$$

$$[F, G] = 0 \quad \text{أي} \quad [F, G] = -[F, G]$$

إذا لاحظنا الخاصة الحادية عشر ( 97 ) لمعروضات بواسون أي

$$[ H , F ] = \frac{d F}{d t}$$

استنتجنا أن الشرط اللازم ليكون تابع ما  $F$  مراقباً قانونياً للهاميلتوني هو أن يكون

$$\frac{d F}{d t} = F' = 1$$

وان الشرط اللازم ليكون  $F$  تبادلياً مع  $H$  هو أن يكون

$$\frac{d F}{d t} = 0$$

أي ان الهاميلتوني  $H$  تبادلي مع الثوابت .

★ ★ ★





## الفصل الرابع عشر

### الميكانيك النسبوي

- المنهج الاساسي لنظرية النسبية الخاصة
- تحويلات لورنتز
- تحويلات لورنتز المعاكسة
- انسجام تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه
- فراغ منكوفسكي رباعي الابعاد
- تقاصر الطول
- تطاول الزمن
- تحويلات لورنتز للسرع
- انسجام تحويلات لورنتز للسرع مع تحويلات غاليليه ومع مبدأ أنشتاين
- تحويلات لورنتز للتسارعات
- انسجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع تحويلات غاليليه ومع مبدأ أنشتاين
- التحريك النسبوي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة  
مكتبتي الخاصة  
على موقع ارشيف الانترنت  
الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

لقد استندت صياغة الميكانيك التقليدي على مجموعة من المفاهيم وهي مفاهيم المكان والزمان والمادة ، ومجموعة من المبادئ او القوانين وهي قوانين نيوتن في التحريك . وقد أكد الميكانيك التقليدي على نجاحه في تفسير جميع الحركات ودراستها طالما أن السرعة صغيرة جداً بالنسبة لسرعة الضوء . الا أن الميكانيك التقليدي هذا هُجِزَ عن تفسير جميع الحركات التي تنطوي على سرعة من مرتبة سرعة الضوء حيث جاءت النتائج التجريبية مغايرة لما يتنبأ به الميكانيك التقليدي . وهذا يعني بالطبع أن مبادئ الميكانيك التقليدي ( قوانين نيوتن ) ليست صالحة لتمثيل الحوادث الحركية حيثما تضمنت هذه الحوادث سرعة كبيرة من مرتبة سرعة الضوء . ولا بد لذلك من تعديل هذه المبادئ بحيث نضع الميكانيك في قالب آخر ينسجم مع النتائج التجريبية التي تنطوي على السرعة العالية ، ومن أجل السرعة المنخفضة بطبيعة الحال . وهذا ما يتوفر في ما نسميه « نظرية النسبية » التي سنعالجها في هذا الفصل بشكلها المبسط المسمى « نظرية النسبية الخاصة » .

ويجب ألا يلتبس الامر بين « الميكانيك النسبوي » ، نسبة الى نظرية النسبية وبين « ميكانيك الكم » المبني على أساس « النظرية الكومية » والذي يعالج الحركات في اطار نظرية النسبية لافي اطار النظرية التقليدية في الميكانيك بصورة خاصة وفي الفيزياء كلها بصورة عامة . ونود أن نشير أيضاً الى أنه لا يوجد ترابط ملازم بين نظرية النسبية ونظرية الكم من حيث أن الصفة النسبوية والصفة الكومية لا تظهران بنفس الحدة أو الأهمية في كل حادث فيزيائي . فهناك حوادث تكون فيها تأثيرات النظرية الكومية ضعيفة أو غير مهمة على عكس تأثيرات نظرية النسبية ، وبالعكس . ولهذا يجب أن ننظر الآن في التعديلات المناسبة في صياغة الميكانيك التي يتطلبها الميكانيك النسبوي بغض النظر عما يمكن أن يفرضه ميكانيك الكم . وسنركز اهتمامنا

بصووة رئيسية حول كيف يمكن أن ندخل النسبية الخاصة ضمن إطار الميكانيك التقليدي .

### 1 - المنهج الاساسي لنظرية النسبية الخاصة :

كنا في دراسة الحوادث الميكانيكية في إطار الميكانيك التقليدي نعتبر ما سميناه بجمل المقارنة العطالية ، وهي التي تتحرك في الفراغ حركة مستقيمة منتظمة . ورأينا عندئذ إن قانون نيوتن الثاني في التحريك :

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

لايصح إلا في جملة مقارنة عطالية ، ويعتبر أساساً لدراسة الحركات في هذه الجمل . وذكرنا أن الجمل الأخرى المتحركة حركة دورانية أو حركة مستقيمة متسارعة أو كليهما معاً هي كلها جمل لا عطالية ولايصح فيها تطبيق قانون نيوتن المذكور . ورأينا في حينه أنه لا بد من تعديل هذا القانون ليصح في جملة لا عطالية .

ويمكن أن نبين بسهولة أن كل جملة مقارنة تتحرك حركة مستقيمة منتظمة

بالنسبة لجملة عطالية هي أيضاً جملة

عطالية يصح فيها قانون نيوتن

ويكون لتسارع جسم متحرك ما

قياس واحد في الجملتين . فإذا كانت

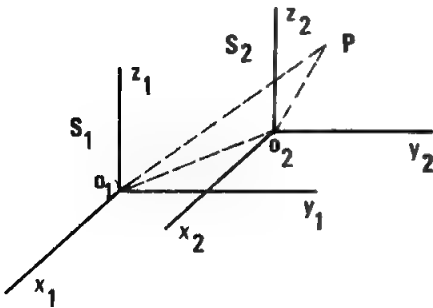
الجملة  $S_1$  عطالية وكانت  $S_2$  تتحرك

بالنسبة لها بسرعة ثابتة  $\vec{v}$  ، كما

يبين الشكل ( 1 ) ، وكان  $P$

حسباً متحركاً في كل من الجملتين

فان :



الشكل ( 1 )

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{v} t \quad (2)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v} \quad (3)$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \quad (4)$$

وذلك بالاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة للزمن، حيث  $\vec{r}_1$  و  $\vec{v}_1$  و  $\vec{a}_1$  موضع الجسم وسرعته وتسارعه بالنسبة للجملة  $S_1$  وحيث  $\vec{r}_2$  و  $\vec{v}_2$  و  $\vec{a}_2$  موضعه وسرعته وتسارعه بالنسبة للجملة  $S_2$ . وهذه العلاقات (2) و (3) و (4) هي مانسبته بتحويلات غاليليه للكان والسرعة والتسارع، وحيث في هذه التحويلات يعتبر الزمن واحداً في الجملتين. وتفيد العلاقة (3) أن سرعتي المتحرك متباينتان في الجملتين، بينما تفيد العلاقة (4) أن تسارعه متساويان. وهذا يعود الى أنه اذا كانت سرعة الضوء هي  $\vec{c}$  بالنسبة للجملة  $S_1$  فانها تساوي  $\vec{c} - \vec{v}$  بالنسبة للجملة  $S_2$ . لكن قياسات وتجربات عديدة، مثل تجربة مايكلسون - مورلي، لقياس سرعة الضوء في جل مختلفة أثبتت أن سرعة الضوء ثابتة لا تختلف باختلاف جل المقارنة التي تقاس فيها. وهذا ماحداً بآنشتاين الى وضع مبدئه الشهير القائل بأن «سرعة الضوء واحدة بالنسبة لجميع الجمل»، ومن هنا نجد أنه لا بد من ايجاد تحويلات أخرى تحافظ على قيمة واحدة لسرعة الضوء في جميع الجمل. وهذه التحويلات المنشودة هي «تحويلات لورنتز» التي سنعالجها في الفقرة التالية. ولقد بين آنشتاين أن مثل هذه التحويلات تتطلب اعادة النظر في مفهوم «الزمن» ومفهوم «التزامن» أو التوافق. ولقد ذهب آنشتاين الى أبعد من ذلك حيث فرض أن جميع الحوادث الفيزيائية يجب أن تتماثل أو تتكافأ في جميع الجمل العطالية. وهذا ما يعرف «بمبدأ التكافؤ». وبموجب ذلك لا يمكن تمييز جملة عطالية عن جملة عطالية أخرى.

ولكي نلخص ما تقدم نقول إن قوانين الفيزياء يجب أن تصاغ في اطار مبدأ آينشتاين ، أو مبدأ النسبية ، المتمثل بشقيه « وحدانية سرعة الضوء وتكافؤ الحوادث الفيزيائية في جميع الجمل العطالية » . وهذا ما يقودنا مباشرة الى الجزم بأن التحويلات من جملة عطالية الى جملة عطالية أخرى ، وهي تحويلات لورنتز ، يجب ألا تتعارض مع هذا المبدأ . هذا من جهة ومن جهة أخرى يجب أن تنسجم تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه من أجل السرعة الصغيرة ، أي أن تحويلات لورنتز يجب أن تقبل تحويلات غاليليه كتقريب لها من أجل تلك السرعة . ويجب ، فوق ذلك ، أن تقبل قوانين الفيزياء اللسبوية قوانين الفيزياء التقليدية (اللانسبوية) كتقريبات لها من أجل السرعة اللانسبوية ( الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ) .

يتبين مما سبق أن منهج نظرية النسبية الخاصة ذو شقين ،

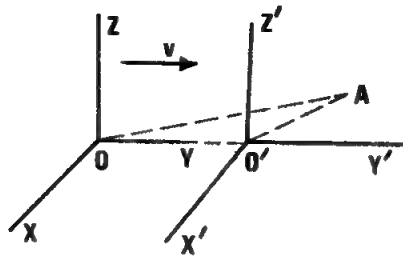
أولا ( يجب أن نربط بين جملتين عطاليتين بتحويلات تحافظ على وحدانية سرعة الضوء .

ثانيا ( يجب أن نخضع حوادث الفيزياء الى قوانين تحافظ على تكافؤ هذه الحوادث في مختلف الجمل العطالية .

إن المعلومات التجريبية الكثيرة المتوفرة والتجارب التي أجريت حتى الان تتفق مع الصورة الفيزيائية التي نتجت عن هذا المنهج . وهذا هو ، حق الان المبرر السكافي لقبول مبدأ آينشتاين الاساسي ، أو مبدأ النسبية .

## II — تحويلات لورنتز :

لنعد مرة ثانية الى تحويلات غاليليه والتي تفترض أن الزمن واحد بالنسبة للجملتين وأن الاحداثيات المتعامدة مع السرعة  $\vec{v}$  لا تتأثر بهذه السرعة . عندئذ نستطيع أن نكتب هذه التحويلات من الجملة S الى الجملة S' مفترضين أن S' تتحرك بسرعة v موازية للمحور oz ، كما يبين الشكل ( 2 ) . وهذه التحويلات هي عندئذ كما يلي :



الشكل ( 2 )

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - vt \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

نفترض أنه في لحظة انطباق  
الجلتين على بعضهما وبالنسبة لانبطاق  
مركزيهما  $o$  و  $o'$  أطلقت ومضة  
ضوئية من المبدأ المشترك . ان  
تحويلات غاليليه المبينة في العلاقات  
( 5 ) تبين أن مراقباً في الجملة S

وآخر في الجملة  $S'$  يريان الامواج الضوئية لتنتشر بسرعتين مختلفتين . وهذا  
ماثبت بطلانه حيث أن سرعة انتشار الضوء واحدة بالنسبة لجميع  
الجلل العطالية .

وفي الحقيقة ، يرى المراقب في S أن الضوء ينتشر بسرعة واحدة C في  
جميع الجهات ويرى أن الامواج الضوئية كرات مراكزها في  $o$  . كما أن  
المراقب الثاني في  $S'$  يرى الضوء ينتشر بسرعة واحدة C في جميع الاتجاهات  
ويرى أن الامواج الضوئية كرات مراكزها في  $o'$  . وفوق ذلك فإن المراقب  
في S يرى أن الموجة الضوئية قد وصلت الى A في اللحظة  $t$  بعد أن قطعت  
مسافة قدرها  $Ct$  . ويكتب :

$$r = Ct \quad (6)$$

أما المراقب في  $S'$  فيرى أن الموجة الضوئية قد وصلت الى A في اللحظة  $t'$   
بعد أن قطعت مسافة قدرها  $Ct'$  . ويكتب :

$$r' = Ct' \quad (7)$$

أي أن :

$$r^2 - C^2 t^2 = 0 \quad \text{و} \quad r'^2 - C^2 t'^2 = 0 \quad (8)$$

وهذا بالطبع لا يتفق مع تحويلات غاليليه (5) . والتحويل المطلوب يجب أن يحقق العلاقتين (8) معاً . أي أنه يجب أن يعدم المقدارين :

$$R^2 = r^2 - C^2 t^2 \quad \text{و} \quad R'^2 = r'^2 - C^2 t'^2 \quad (9)$$

وهذا يدل على أن هذين المقدارين متناسبان وعامل تناسبهما مستقل عن المكان وعن الزمان وقد يكون تابعاً لـ  $v$  فقط . أي :

$$R'^2 = f(v) R^2 \quad (10)$$

وبما أن الجملتين  $S$  و  $S'$  تلعبان دورين متكافئين ومتماثلين فإن بإمكاننا أن نكتب أيضاً :

$$R^2 = f(-v) R'^2 \quad (11)$$

لأن  $S$  لتحرك بالنسبة لـ  $S'$  بسرعة  $v$  . ومن (10) و (11) نجد :

$$f(v) f(-v) = 1 \quad (12)$$

ومن جهة ثانية لو أننا عكسنا الاتجاهات جميع محاور الجملتين لتبدلت  $v$  بـ  $-v$  دون أن يتبدل  $R^2$  و  $R'^2$  . أي لكان عندئذ :

$$R'^2 = f(-v) R^2 \quad (13)$$

حيث تمطينا مقارنة (10) و (13) أن :

$$f(-v) = f(v) \quad (14)$$

وأخيراً فإن مقارنة (12) و (14) تبين أن :



$$f(v) = 1 \quad (15)$$

وهذا يدل دلالة قاطعة على أن التحويلات التي نبحث عنها يجب أن تحقق العلاقة المتكافئة التالية :

$$\left. \begin{aligned} R'^2 &\equiv R^2 \\ r'^2 - C^2 t'^2 &\equiv r^2 - C^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - C^2 t'^2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - C^2 t^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

والعلاقة الأخيرة بأشكالها الثلاثة تبين أن  $t'$  مختلفة عن  $t$  نظراً لأن  $r'$  مختلفة عن  $r$ . أي أن الزمن ليس واحداً بالنسبة للجملتين العطاليتين  $S$  و  $S'$ . وهذا هو أول اختلاف بين التحويلات التي نبحث عنها وتحويلات غاليليه .

إذا عدنا الى الشكل ( 2 ) نرى واضحاً أن الانتقال من احدى الجملتين الى الاخرى لا يؤثر على الاحداثيين المعامدين للسرعة  $\vec{v}$  . وهذا يجعل  $x' = x$  و  $y' = y$  . ولما كان  $o o' = v t$  بالنسبة لمراقب في  $S$  فان  $z = v t$  من أجل  $z' = 0$  . وهذا يقترح أن تكون علاقات التحويل على النحو التالي :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= a (z - v t) \\ t' &= b (t - k z) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

حيث  $a$  و  $b$  ثابتان لا يتعلقان بالاحداثيات أو بالزمن وينتهيان الى الواحد من أجل السرعة الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ، وحيث  $k$  ثابت لا يتعلق بالاحداثيات أو بالزمن وينتهي الى الصفر من أجل السرعة الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ، وكل ذلك لكي تأتي التحويلات المطلوبة منسجمة مع تحويلات غاليليه في الميكانيك التقليدي .

ضمن هذه الاعتبارات ، اذا استعملنا العلاقات ( 17 ) في المتطابقة ( 16 )  
فان الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$x^2 + y^2 + (a^2 - b^2 k^2 C^2) z^2 - 2 (a^2 v^2 - k b^2 C^2) z t \\ - (b^2 - a^2 v^2 / C^2) C^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - C^2 t^2 \quad (18)$$

ولما كان من الواجب أن تتحقق هذه العلاقة مهما تكن التحويلات الاحداثية  
والزمن وجب عندئذ أن تتطابق الامثال في الطرفين . وهذا يعطي :

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 k^2 C^2 &= 1 \\ b^2 - a^2 v^2 / C^2 &= 1 \\ a^2 v^2 - k b^2 C^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

وبجمل مجموعة المعادلات المترافقة هذه نجد :

$$\left. \begin{aligned} a &= b = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \\ k &= v / C^2 \\ \beta &= v / C \end{aligned} \right\} \text{ حيث } \quad (20)$$

وتصبح عندئذ علاقات التحويل ( 17 ) على النحو التالي :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \frac{z - v t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t' &= \frac{t - v z / C^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

وقد سميت هذه العلاقات باسم تحويلات لورنتز ، وهو الذي حصل عليها  
عام 1890 أثناء دراسته للحقل الكهربيسي لشحنة متحركة

ان العلاقة ( 16 ) توحي بأن المقدار  $G t$  يسلك مسلك الاحداثيات وهو مقدار له طبيعة الطول ( وهي طبيعة الاحداثيات الديكارتية ) وعلاوة على ذلك هو مقدار يختلف بين الجملتين ، ، نصح اعتباره احداثياً رابعاً . ولهذا يمكننا أن نمثل الاحداثيات في كل من الجملتين  $S$  و  $S'$  بمصفوفتين عموديتين  $X$  و  $X'$  بالترتيب أي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Ct \end{bmatrix} , \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ Ct' \end{bmatrix} \quad (22)$$

وعندئذ نستطيع كتابة معادلات تحويل لورنتز على النحو التالي :

$$X' = M X \quad (23)$$

حيث  $M$  مصفوفة تحويل لورنتز المعطاة بالعلاقة :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \quad (24)$$

ملاحظة :

نلاحظ فيما سبق أن حركة الجملة  $S'$  بالنسبة لـ  $S$  وفق السرعة  $\vec{v}$  هي حركة موازية للمحور الاحداثي الثالث  $oz$  . ولو كانت هذه الحركة موازية لمحور آخر مثل المحور  $oy$  لأصبحت تحويلات لورنتز كالتالي :

$$x' = x$$

$$y' = \frac{y - v t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - v y / C^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

( 25 )

ولأصبحت مصدوفة تحويل لورنتز :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{vmatrix} \quad ( 26 )$$

### III - تحويلات لورنتز العاكسة :

تمثل تحويلات لورنتز العاكسة بالعلاقات التي تعبر عن الاحداثيات في الجملة S بدلالة الاحداثيات في الجملة S'. ويمكن الحصول على هذه العلاقات بادراك أن الجملة S تتحرك بالنسبة للجملة S' بسرعة قدرها  $-v$  وبتطبيق الطريقة نفسها . وهذا يقود الى مايلي :

$$x = x'$$

$$y = y'$$

$$z = \frac{z' + v t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t = \frac{t + v z' / C^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

( 27 )

أو بدلالة المصفوفات .

$$X = M' X' \quad (28)$$

حيث :

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \quad (29)$$

IV — انسجام تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه :

بما أن التجربة والواقع أثبتا أن تحويلات غاليليه صحيحة من أجل السرع الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ( أي في حقل الفيزياء التقليدية ) فإن تحويلات لورنتز يجب ألا تتعارض معها في تلك الحالة . وهذا ما هو قائم بالفعل حيث يمكننا أن نرى أن تحويلات غاليليه هي تقريب جيد لتحويلات لورنتز عندما تكون  $v$  صغيرة جداً بالنسبة لـ  $C$  أي عندماؤول  $\beta$  الى الصفر . ويمكن أن نتبين ذلك بسهولة بمجرد تعويض  $\beta$  بصفر في معادلات تحويل لورنتز بأي شكل من أشكالها الواردة آنفاً ، حيث تؤول المعادلات ( 21 ) مثلاً الى المعادلات ( 5 ) .

V — فراغ منكوفسكي رباعي الابعاد :

يتضح من خلال مارأيناه في الفقرات السابقة أن الزمن  $t$  في الجملة  $S$  والزمن  $t'$  في الجملة  $S'$  مختلفان وأنهما يلعبان دوراً مشابهاً لدور الاحداثيات .

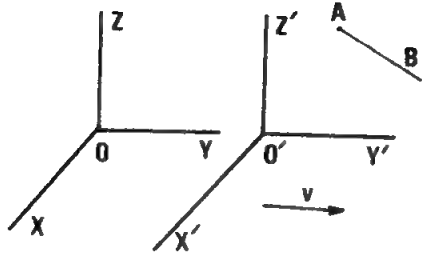
لكن الزمن ، هذا ليس من طبيعة الاحداثيات من حيث الابعاد . ولو استعملنا المقدار  $Ct$  في الجملة  $S$  والمقدار  $Ct'$  في الجملة  $S'$  نلاحظ عندئذ أن هذين المقدارين يلعبان أيضاً دور الاحداثيات ، وخاصة في تحويلات لورنتز . ونلاحظ أيضاً أنهما من طبيعة الاحداثيات نفسها من حيث أنهما يقاسان بالطول ، شأنهما شأن الاحداثيات الديكارتية . ونظراً للترابط بينهما وبين الاحداثيات هذه ولائهما لا يتعيان باستقلال عن الاحداثيات ( أي المكان ) فإن من الطبيعي عندئذ أن نعتبر لكل حادثة فيزيائية مجموعة من الاحداثيات المكانية واحداثي رابع زمني  $Ct$  في الجملة  $S$  ، أو  $Ct'$  في الجملة  $S'$  . وبهذا الشكل يكون لأية حادثة فيزيائية أربع احداثيات في أية جملة مقارنة عطالية هي  $(x, y, z, Ct)$  . وذلك مايفرض علينا أن نعتبر الفراغ ذا أربعة أبعاد وأن نعتبر الموضع ممثلاً بمتجهة أو شعاع رباعي الأبعاد .

لقد لحا منكوفسكي منحى مشابهاً حيث اعتبر أن الاحداثيات الاربعة لأية حادثة فيزيائية هي  $(x, y, z, iCt)$  ، حيث  $i = \sqrt{-1}$  . والفراغ الذي تمثله هذه الاحداثيات هو عندئذ مانسميه « فراغ منكوفسكي » . وباعتقادنا فإن استعمال العدد العقدي  $i$  في احداثيات منكوفسكي ليس له مبرر فيزيائي . هذا علاوة على أنه يحمل مصفوفات تحويلات لورنتز عقدية بدلا من أن تكون حقيقية . وعلى الرغم من هذا الفارق بين إعتبارات منكوفسكي والفراغ الذي اقترحناء في هذه الفقرة فاننا سنطلق على فراغنا هذا اسم « فراغ منكوفسكي » أيضاً .

## VI — تقاصر الطول :

إن علاقات تحويلات لورنتز ( 21 ) التي تربط الاحداثيات الاربعة في فراغ منكوفسكي في كل من الجملتين  $S$  و  $S'$  توحي الينا بأنه إذا قيس طول مافي الجملتين فإن نتيجتي القياس متباينتان . وليبيان صحة ذلك نعتبر قضيباً  $AB$

كما في الشكل ( 3 ) ، ثابتاً في الجملة  $S'$  .  
وانتكن الاحداثيات المكانية لطرفيه في الجملتين  $S$  و  $S'$  كما يلي :



$A : (x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_1', y_1', z_1')$

$B : (x_2, y_2, z_2)$  و  $(x_2', y_2', z_2')$

إذا طلب من كل من راصدين في  $S$  و  $S'$  أن يحدد طول القضيب  $AB$  فإنه يقيس الاحداثيات المكانية لطرفيه في آن واحد . ونقول عن

الشكل ( 3 )

حادثتي قياس احداثيات  $A$  و  $B$  عندئذ أنها حادثتان متزامنتان . ثم بحسب مركبات طول القضيب على المحاور الثلاثة :

$$\left. \begin{aligned} X &= x_2 - x_1 , \quad Y = y_2 - y_1 , \quad Z = z_2 - z_1 \\ X' &= x_2' - x_1' , \quad Y' = y_2' - y_1' , \quad Z' = z_2' - z_1' \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

واللربط بين هذه القياسات نستعمل علاقات لورنتز ( 21 ) في العلاقات الاخيرة حيث نجد :

$$X = X' , \quad Y = Y' , \quad Z = Z' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad (31)$$

ويتضح من ( 31 ) أن الاطوال المتعامدة مع حركة إحدى الجملتين بالنسبة للآخرى لها قياس واحد في الجملتين في حين أن الاطوال الموازية لهذه الحركة تتميز بقياسين مختلفين في هاتين الجملتين . ونلاحظ بصورة خاصة أن القياس في الجملة  $S$  أصغر منه في الجملة  $S'$  .

إذا أدركنا أن القياس في الجملة  $S'$  هو قياس سكوني لأن  $AB$  ساكن بالنسبة لها ، وأن القياس في  $S$  هو قياس حركي لأن  $AB$  متحرك بالنسبة لها فانتنا نحكم عندئذ أن الحركة لا تؤثر على قياس الأطوال المتعامدة معها في حين أنها تؤثر على قياس الأطوال الموازية لها . وتبين العلاقة الثالثة من ( 31 ) أن القياس الحركي  $Z$  أصغر من القياس السكوني  $Z'$  . ونعبر عن ذلك بالقول بأن الطول « يتقاصر » بسبب الحركة . ونكتب :

$$L_{\text{motion}} < L_{\text{rest}} = L_{\text{motion}} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad (32)$$

كمثال على ذلك لنعتبر مركبة فضائية تبعد عن الأرض بسرعة ثابتة  $v = \sqrt{0,19} C$  . فإذا قاس ملاح في المركبة طول قلم الرصاص الذي في يده ووجد أنه يساوي 25 cm وإذا قاس مراقب على الأرض طول قلم الرصاص الذي في يد الملاح لوجد أنه يساوي

$$L = 25 \sqrt{1 - 0,19} = 25 \sqrt{0,81} = 22,5 \text{ cm}$$

ولو تخيلنا أن المركبة تسير بسرعة الضوء ، وهذا مستحيل طبقاً ، لكان عندئذ  $\beta = v/C = 1$  ولوجد المراقب على الأرض أن طول قلم الملاح :

$$L = 25 \sqrt{1 - 1} = 0$$

## VII - تضاؤل الزمن :

نعرف الفترة الزمنية ، كالاعتاد ، بأنها المجال الزمني الذي يفصل بين لحظتي وقوع حادثتين . وإذا وقعت الحادثتان في مكان واحد قلنا عنهما أنها « مماكنتان » . فالتأكد أن وقوع حادثتين مختلفتين في مكان واحد دون أن يلحق بالضرورة في زمن واحد . بينما رأينا أن « التزامن » هو وقوع



حدثين في زمن واحد دون أن يقعوا بالضرورة في مكان واحد. أما اذا وقعت حدثتان في مكان واحد وزمن واحد قلنا عنهما انهما « متطابقتان » .

لنفرض الان أن  $t_1$  و  $t_2$  هما لحظتا ( أي زمنا ) وقوع الحادثتين  $A_1$  و  $A_2$  بالنسبة للجملة  $S$  وأن  $t'_1$  و  $t'_2$  هما زمنا وقوع هاتين الحادثتين بالنسبة للجملة  $S'$  . وتكون عندئذ الفترتان الزمئيتان الفاصلتان بين الحادثتين بالنسبة للجملتين هما بالترتيب :

$$T = t_2 - t_1 \quad \text{و} \quad T' = t'_2 - t'_1 \quad (33)$$

ولنفرض فوق ذلك أن الحادثتين متماكنتان في الجملة  $S'$  . فهما غير متماكنتين بالضرورة في الجملة  $S$  . ونعبر عن ذلك بأن نكتب الاحداثيات المكانية لهما في الجملتين كما يلي :

$$A_1 ( x'_1 , y'_1 , z'_1 ) , \quad A_2 ( x'_2 = x'_1 , y'_2 = y'_1 , z'_2 = z'_1 )$$

$$A_1 ( x_1 , y_1 , z_1 ) , \quad A_2 ( x_2 , y_2 , z_2 )$$

ونذكر هنا من جديد أن الزمن ليس مستقلا عن المكان كما كان الامر في تحويل غاليليه بل مرتبط به ارتباطاً وثيقاً عن طريق تحويلات لورنتز . فاذا استعملنا هذه التحويلات المعطاة بالعلاقات ( 21 ) في العلاقات ( 33 ) وقارنا النتائج نجد أن :

$$T = T' / \sqrt{1 - \beta^2} > T' \quad (34)$$

وفي هذه العلاقة تكن نتيجة هامة ، وهي أن القياس الحركي  $T$  للفترة الزمنية بين الحادثتين أكبر من القياس السكوني  $T'$  لهذه الفترة . ويتضح هذا التمييز اذا اعتبرنا أن الحادثتين لهما في مكان ثابت بالنسبة للجملة  $S'$  بينما

مكان الحادثين متحرك بالنسبة للجملة S . ونعبر عن هذه الظاهرة بقولنا ان الزمن « يتطاول » بسبب الحركة . ونكتب :

$$T_{\text{motion}} > T_{\text{rest}} = T_{\text{motion}} / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (35)$$

كشال على ذلك لنعبر من جديد المركبة الفضائية التي تبعده عن الارض بالسرعة الثابتة  $v = \sqrt{0.19} \text{ C}$  ولنفرض أن ملاحظها أطلق اشارتين ضوئيتين بفاصل زمني قدره  $T' = 25 \text{ sec}$  حسب مقياسيته . فاذا قاس راصد على الارض لحظتي وصول الاشارتين اليه وحسب الفاصل الزمني بينهما ، حسب مقياسيته هو وليس حسب مقياسية الملاح ، لوجد أنه يساوي :

$$T = 25 / \sqrt{1 - 0.19} = 27.78 \text{ sec}$$

### VIII - تحويلات لورنتز للسرع :

رأينا أن تحويلات لورنتز الاساسية تربط المكان والزمان في جملة عطالية S بالمكان والزمان في جملة عطالية أخرى S' حين تتحرك احدهما بالنسبة للآخرى حركة مستقيمة منتظمة بسرعة ثابتة  $v$  . ورأينا أن لهذه التحويلات انعكاساً مباشراً على قياس المكان والزمان في الجملتين . وسنرى الان أن هذه التحويلات تؤثر أيضاً في قياس السرعة في هاتين الجملتين ، وسنجد الروابط بين قياس السرعة فيهما . فاذا كانت مركبات سرعة المتحرك في الجملة S كما يقيسها راصد فيها هي :

$$V_x = \frac{dx}{dt} , \quad V_y = \frac{dy}{dt} , \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (36)$$

فان الراصد في الجملة S' يقيس مركبات السرعة التالية :

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} , \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'} , \quad V'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (37)$$

فإذا اشتقنا علاقات تحويل لورنتز واستعملنا ( 36 ) و ( 37 ) فإنا نجد :

$$\left. \begin{aligned} V'_x &= \frac{V_x \sqrt{1-\beta^2}}{1 - V_x v / C^2} \\ V'_y &= \frac{V_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - V_x v / C^2} \\ V'_z &= \frac{V_z - v}{1 - V_x v / C^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

وتسمى هذه العلاقات بتحويلات لورنتز للسرع .

IX - انسجام تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه ومع مبدأ آ نشتاين :

عندما تكون سرعة الجمة  $v$  صغيرة بالنسبة لسرعة الضوء تصبح  $\beta$  قريبة من الصفر وكذلك  $v / C^2$  . واستخدم ذلك في ( 38 ) يؤدي الى النتيجة التالية :

$$V'_x = V_x , \quad V'_y = V_y , \quad V'_z = V_z - v$$

وهذا ما ينسجم تماماً مع ما وجدناه من أجل السرع في التحويلات الغاليلية التي تمثلها العلاقة ( 3 ) .

لنفرض الان أن المتحرك هو موجة ضوئية . عندئذ تكون :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = C \quad (39)$$

فإذا ربعنا العلاقات ( 38 ) وجمعناها طرفاً الى طرف وأصلحنا الطرفين الناتجين للعلاقة الجديدة مستعملين ( 39 ) فإنا نجد عندئذ أن :

$$V' = C$$

أي أن سرعة الضوء في الجملة  $S'$  هي أيضاً  $C$  . ومعنى ذلك أن قياس سرعة الضوء في الجملتين واحد مهما كانت سرعة إحداها بالنسبة للآخرى . أي أن لسرعة الضوء قياساً كونياً ثابتاً . وهذا هو مضمون مبدأ آينشتاين . فتحويلات لورنتز للسرع منسجمة إذن مع هذا المبدأ .

### X - تحويلات لورنتز للتسارعات :

ليكن تسارع المتحرك في كل من الجملتين  $S$  و  $S'$  معطى بمركباته على محاورها . أي :

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} , \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} , \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} \quad (40)$$

$$a'_x = \frac{dV'_x}{dt'} , \quad a'_y = \frac{dV'_y}{dt'} , \quad a'_z = \frac{dV'_z}{dt'} \quad (41)$$

فاذا اشتققنا المعادلات ( 38 ) واستعملنا العلاقات ( 40 ) و ( 41 ) حصلنا على العلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - \frac{v}{C^2} V_z)^3} \left[ \left(1 - \frac{v}{C^2} V_z\right) a_x + \frac{v}{C^2} V_x a_z \right] \\ a'_y &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - \frac{v}{C^2} V_z)^3} \left[ \left(1 - \frac{v}{C^2} V_z\right) a_y + \frac{v}{C^2} V_y a_z \right] \\ a'_z &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - \frac{v}{C^2} V_z)^3} \sqrt{1 - \beta^2} a_z \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

وهذه العلاقات هي ما نسميه بتحويلات لورنتز للتسارعات . وهي تربط بين مركبات التسارع في احدى الجملتين بمركباته ومركبات السرعة في الجملة الاخرى .

لكي ندرك تأثير النسبية على التسارعات بشكل أوضح لنفترض حالة خاصة ولننظر في التسارعات في لحظة ما يكون فيها المتحرك ساكناً في الجملة  $S'$  التي تتحرك بسرعة  $v$  بالنسبة الى الجملة  $S$  حركة مستقيمة منتظمة وفق المحورين المنزلقين  $ox$  و  $ox'$  . عندئذ يكون :

$$V_x = 0 , \quad V_y = 0 , \quad V_z = C$$

$$V'_x = 0 , \quad V'_y = 0 , \quad V'_z = 0$$

وتؤدي علاقات تحويل التسارعات ( 42 ) الى الشكل :

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= a_x / (1 - \beta^2) \\ a'_y &= a_y / (1 - \beta^2) \\ a'_z &= a_z / (1 - \beta^2) \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

فعندما ننتقل من الجملة  $S$  الى الجملة  $S'$  فان التسارع كله يصبح مركباًه يضرب بالعامل  $1 / (1 - \beta^2)$  . وهذا يزيد قياس التسارع في  $S'$  عنه في  $S$  . وينسجم ذلك مع فكرة تقاصر الطول . كما أن مركبة التسارع الموازية لحركة الجملة  $S'$  تضرب بعامل آخر هو  $1 / \sqrt{1 - \beta^2}$  . وهذا ما ينسجم مع فكرة تطاول الزمن .

ولكي نوضح هذه الفكرة سنطلق رموزاً مناسبة على بعض المقادير التي لها علاقة بالتسارعات . فليكن :

$$d^2 z = Z \quad , \quad (d t)^2 = T^2$$

$$d^2 z' = Z' \quad , \quad (d t')^2 = T'^2$$

فيكون :

$$a_z = \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{Z}{T^2} \quad a'_z = \frac{d^2 z'}{d t'^2} = \frac{Z'}{T'^2} \quad (44)$$

ولكننا ، حسب العلاقتين (31) و (34) ، نرى أن :

$$Z' = Z / \sqrt{1 - \beta^2} \quad T' = T \sqrt{1 - \beta^2} \quad (45)$$

وبالتعويض من (45) في (44) ينتج :

$$a'_z = \frac{Z / \sqrt{1 - \beta^2}}{T^2 (1 - \beta^2)} = a_z / (1 - \beta^2) \sqrt{1 - \beta^2} \quad (46)$$

وهذا ما يتفق مع ما وجدناه في (43) .

كذلك نلاحظ من (43) أن شعاع التسارع في  $S'$  أقرب الى المحور الموازي لحركة الجملة منه في حالة الجملة  $S$  وكلما ازدادت  $\beta$  ازداد هذا الاقتراب . وعندما تصبح  $\beta = 1$  يصبح التسارع موازياً تماماً لسرعة حركة الجملة  $S'$  ، أي أنه ينطبق على اتجاه الحركة وتصبح قيمته غير محدودة . أي :

$$\lim_{v \rightarrow C} a = \infty$$

XI — انتمجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع تحويلات غاليليه ومبدأ

آ نشأتين :

عندما تكون السرعة  $v$  صغيرة أمام سرعة الضوء تؤول العلاقات (42)

الى مايلي :

$$a'_x = a_x , \quad a'_y = a_y , \quad a'_z = a_z$$

وهذا هو تحويل غاليليه للسرع . انظر العلاقة ( 4 ) . ويدل هذا على انسجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع تحويلات غاليليه .

من جهة أخرى ، اذا كان المتحرك موجة ضوئية فان سرعتها C ثابتة في الجملة S وبالتالي فتسارعها فيها معدوم . أي :

$$a_x = a_y = a_z = 0$$

واستعمال هذه النتيجة في تحويلات لورنتز للتسارعات يؤدي الى أن :

$$a'_x = a'_y = a'_z = 0$$

وتعني هذه النتيجة أن للضوء سرعة ثابتة في الجملة S' أيضاً . وهذا ما يؤكد انسجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع مبدأ أنشتاين .

## XII — التحريك النسبي :

لقد رأينا أن نظرية النسبية تؤكد على عدم انفصال الزمان عن المكان وأن موضع المتحرك في فراغ منكوفسكي أو « الفراغ العالمي » يتحدد باحداثيات مكانية — زمانية . وتبين هذه النظرية بصورة خاصة أن أياً من الزمان أو المكان ليس « وحدانياً » كما كان الحال في الميكانيك التقليدي حيث يعتبر الزمان « وحدانياً » أي هو نفسه بالنسبة لجميع جمل المقارنة العطالية . اذن هنا في نظرية النسبية لا يحافظ التغير الزماني  $dt$  على قيمته لدى الانتقال من جملة الى أخرى . أما المقدار الذي يحافظ على قيمته والذي له طبيعة الزمن فهو  $du$  المعطى بالعلاقة :

$$d u^2 = d t^2 - \frac{1}{C^2} d \vec{r}^2 \quad (47)$$

بحيث نستطيع أن نكتب نتيجة لتحويلات لورنتز :

$$d t^2 - \frac{1}{C^2} d \vec{r}^2 = d t'^2 - \frac{1}{C^2} d \vec{r}'^2 \quad (48)$$

$$d u^2 = d u'^2 \quad \text{أو} :$$

وخلاصة القول هنا أن المقدار  $d u$  هو « وحداني » ومن طبيعة الزمن . ان موضع أي جسم يتمين في جملة ما  $S$  بموضعه المكاني  $\vec{r}$  وموضعه الزماني  $c t$  ، أو باختصار فإنه يتمين باحداثياته المكانية - الزمانية  $(\vec{r}, c t)$  . وفي موضع مجاور ناتج عن التغيرات  $d \vec{r}$  و  $c d t$  في الاحداثيات النسبوية (أي المكانية - الزمانية) تصبح احداثياته  $[\vec{r} + d \vec{r}, c(t + d t)]$  وما قبل في الجملة  $S$  يقال في الجملة  $S'$  مع ملاحظة وجود الفتححات على الاحداثيات فيها .

كنا في الميكانيك التقليدي قد عرفنا السرعة بأنها مشتق الموضع بالنسبة لتحول وحداني هو الزمن . وعلى غرار ذلك سنعرف السرعة في نطاق نظرية النسبية بأنها مشتق الموضع بالنسبة لتحول الوحداني الزمني  $d u$  لكن الموضع هناله شق مكاني وآخر زماني وللسرعة بالتالي مركبتان مكانية وزمانية هما :

$$\left( \frac{d \vec{r}}{d u}, \frac{d c t}{d u} \right) \quad \text{أو} \quad \left( \frac{d \vec{r}}{d u}, \frac{d t}{d u} \right) \quad (49)$$

ونسمي هذه السرعة « السرعة المطلقة » .

وللسبب نفسه وبالاسلوب نفسه يكون للتسارع مركبتان مكانية وزمانية ويعطى بالعبارة :



$$\left( \frac{d^2 \vec{r}}{d u^2}, \frac{d^2 t}{d u^2} \right) \quad (50)$$

ويسمى بالتسارع و المطلق .

لكي نضع قانون التحريك النسبوي نذكر أولاً أن قانون نيوتن في التحريك التقليدي نص على أن جداء كتلة الجسم المتحرك في تسارعه يساوي القوة المؤثرة عليه . ونذكر أيضاً أن الكتلة في قانون نيوتن التقليدي هذا هو مقدار ثابت لا علاقة له بالحركة فهي إذن ما نسميه بالكتلة السكونية  $m_0$  المميزة للجسم في حالة سكونه . ولما كان للتسارع شقان مكاني وزماني فسيكون لقانون التحريك شقان أيضاً أحدهما يربط بين التسارع المكاني ومقدار ما مرتبط بالقوة والاخر يربط بين التسارع الزماني ومقدار آخر له علاقة بالقوة . وسنحدد هذين المقدارين فيما بعد . إذن نكتب :

$$m_0 \frac{d^2 \vec{r}}{d u^2} = \vec{R} \quad \text{و} \quad m_0 \frac{d^2 t}{d u^2} = T \quad (51)$$

حيث تمثل  $m_0$  الكتلة السكونية للجسم وحيث (  $\vec{R}$  و  $T$  ) شعاع في المكان - الزمان ونسميه « القوة المطلقة » . وبهذا الشكل يمكن التعبير عن قانون التحريك ( 51 ) بالقول : « ان جداء كتلة المتحرك السكونية بتسارعه المطلق يساوي القوة المطلقة المؤثرة عليه .

ولعل هذا القانون بحاجة الى بعض التعديلات التي لا تغير محتواه وانما تغير شكله بحيث يصبح أكثر صلاحاً للاستعمال والتطبيق . نلاحظ أولاً أن العلاقة ( 47 ) تغطي :

$$\left( \frac{d u}{d t} \right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d r}{d t} \right)^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$

أي :

$$\frac{d u}{d t} = \sqrt{1 - \beta^2} = \alpha \quad (52)$$

وإذا طبقنا قاعدة الاشتقاق ،

$$\frac{d A}{d u} = \frac{d A}{d t} \cdot \frac{d t}{d u} = \frac{d A}{d t} \cdot \frac{1}{\alpha} \quad (53)$$

على المعادلة اليسرى من ( 51 ) فإنها تأخذ الشكل التالي .

$$\frac{m_0}{\alpha} \cdot \frac{d \vec{v}}{d t} = \alpha \vec{R} \quad (54)$$

وهنا نعرف المقادير التالية :

$$m = m_0 / \alpha = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{الكتلة النسبوية} \quad (55)$$

$$\vec{F} = \alpha \vec{R} \quad \text{القوة النسبوية} \quad (56)$$

$$\vec{P} = m \vec{v} \quad \text{الاندفاع النسبوي} \quad (57)$$

$$E = m C^2 \quad \text{الطاقة النسبوية} \quad (58)$$

وبادخال هذه المقادير في العلاقة ( 54 ) فإن هذه الأخيرة تصبح كما يلي :

$$\frac{d \vec{P}}{d t} = \frac{d (m \vec{v})}{d t} = \vec{F} \quad (59)$$

ويعني هذه العلاقة أن مشتق الاندفاع النسبوي بالنسبة للزمن يساوي القوة النسبوية . فهذا القانون مشابه لنظيره في الميكانيك التقليدي ، أي قانون نيوتن ، مع فارق أساسي هو استعمال صفة النسبوية مع كل من الاندفاع والقوة في القانون ( 59 ) .

ومما يلفت النظر أيضاً أن الكتلة النسبوية  $m$  المستخدمة في هذا القانون ليست ثابتة وإنما ترتبط بسرعة الجسم عن طريق العلاقة ( 55 ) التي يتضح منها أن هذه الكتلة تقترب من اللانهاية في قيمتها كلما اقتربت السرعة  $v$  من سرعة الضوء  $C$  .

لننتقل الآن الى دراسة المعادلة اليمنى من ( 51 ) بقية أن نتبين المعنى الفيزيائي الذي تتضمنه والذي لا يتضح في شكلها الحالي . فإذا استعملنا قاعدة الاشتقاق ( 53 ) فيها فإنها تأخذ الشكل :

$$\frac{d m}{d t} = \alpha T \quad ( 60 )$$

حيث استعملنا أيضاً علاقة الكتلة النسبوية ( 55 ) . وإذا ضربنا طرفي العلاقة ( 60 ) بـ  $C^2$  فإنها تغدو على النحو التالي :

$$\frac{d ( m C^2 )}{d t} = \alpha T C^2 \quad ( 61 )$$

سنعود الى هذه العلاقة بعد أن نحسب الطرف الثاني منطلقين من المعادلة ( 47 ) التي نكتبها على الشكل :

$$\left( \frac{d t}{d u} \right)^2 - \frac{1}{C^2} \left( \frac{d r}{d u} \right)^2 = 1 \quad ( 62 )$$

فإذا اشتققنا هذه المعادلة بالنسبة لـ  $u$  وجدنا :

$$\frac{d^2 t}{d u^2} \frac{d t}{d u} - \frac{1}{C^2} \frac{d^2 r}{d u^2} \cdot \frac{d r}{d u} = 0 \quad ( 63 )$$

وبتدوين المشتقين من المرتبة الثانية والذين يظهران في هذه العلاقة الأخيرة بقيمتيهما من العلاقتين الأساسيتين ( 51 ) ينتج لدينا ما يلي :

$$\frac{T}{m_0} \frac{dt}{du} - \frac{1}{C^2} \frac{\vec{R}}{m_0} \cdot \frac{d\vec{r}}{du} = 0 \quad (64)$$

أو :

$$\frac{T}{m_0} \frac{dt}{du} - \frac{1}{C^2} \frac{\vec{R}}{m_0} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{du} = 0$$

أو باختصار :

$$T C^2 = \vec{R} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\alpha} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (65)$$

وذلك بعد أن استعملنا العلاقة ( 56 ) .

ان دمج العلاقتين ( 61 ) و ( 65 ) يقود الى العلاقة المنشودة وهي :

$$\frac{d(m C^2)}{dt} = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

أو :

$$dE = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (66)$$

ومضمون هذه العلاقة هو أن تغير الطاقة النسبوية ( السككية ) يساوي العمل الذي تقوم به القوة النسبوية . وهذا مشابه لما هو قائم في النظرية التقليدية التي ينص فيها على أن تغير الطاقة السككية يساوي عمل القوة .

ومن المهم جداً أن نركز اهتمامنا على قانوني التحريك النسبوي ( 59 ) و ( 66 ) وأن نلاحظ أن القانونين المقابلين في الميكانيك التقليدية متشابهان لهما من جهة وينسجمان ( لايتعارضان ) معهما من أجل السرع الصغيرة . كما

يجدر أن نلاحظ أن قوانين التحريك النسبوي تحقق مبدأ التكافؤ الذي ينص على أن قوانين الفيزياء واحدة بالنسبة لجميع الجمل العطالية .

بقي لنا أن نتعرض الى مفهوم الطاقة الحركية . ولهذا الغرض نركز تفكيرنا حول مفهوم الطاقة الكلية :

$$E = m C^2 \quad (67)$$

ولما كانت  $C$  ثابتة لا تتغير فإن أي تغير في  $m$  يتبعه تغير في  $E$  والعكس صحيح . فإذا اعتبرنا حالة السكون كان لدينا :

$$E_0 = m_0 C^2 \quad (68)$$

وهذا يعني أن الطاقة الكلية  $E_0$  للكتلة الساكنة هي جداء الكتلة الساكنة في مربع سرعة الضوء . فإذا تحركت هذه الكتلة اختلفت قيمتها ، حيث أصبحت تعطى بالعلاقة ( 67 ) . ونستنتج من ذلك أن الحركة هي السبب في ازدياد الطاقة من  $E_0$  الى  $E$  . والفرق بينهما هو الذي ندعوه بالطاقة الحركية ، أي :

$$E_k = E - E_0 \quad (69)$$

فإذا استعملنا العلاقات ( 67 ) و ( 68 ) و ( 55 ) في العلاقة ( 69 ) فإننا نجد عندئذ أن الطاقة الحركية تعطى بالعلاقة :

$$E_k = m_0 C^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \quad (70)$$

وهذه العلاقة لاتتناقض مع ما ألفناه في الميكانيك التقليدي من أن الطاقة

الحركية تعطى بنصف جداء الكتلة في مربع السرعة . ويمكننا أن نتبين ذلك بسهولة إذا أدركنا أن  $\beta$  صغيرة جداً في حالة جواز استعمال الميكانيك التقايدي . فإذا أخذنا ذلك بعين الاعتبار ونشرنا الكسر الظاهر في ( 70 ) وجدنا :

$$E_k = m_0 C^2 ( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots - 1 )$$

$$= m_0 C^2 ( \frac{1}{2} \beta^2 + \dots )$$

وبأخذ التقريب من الدرجة الاولى نجد :

$$E_k \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad ( 71 )$$

وذلك ما اعتدنا عليه في ميكانيك نيوتن .

وخلاصة القول هي أننا وضعنا قوانين التحريك في الميكانيك النسبوي رأينا أنها متكافئة في الجمل المطالبة وأنها تقلل قوانين نيوتن كتقريب لها . حالة السرعة الصغيرة أمام سرعة الضوء .

# المسائل





## مسائل الفصل الاول

### المسألة ( I - 1 ) :

يتحرك جسم بسرعة ابتدائية قدرها  $3 \text{ m/sec}$  وتسارع ثابت قدره  $4 \text{ m/sec}^2$  في اتجاه السرعة نفسها . .

- 1 ( ما هي سرعة الجسم بعد  $7 \text{ sec}$  وما هي المسافة التي قطعها ؟
- 2 ( أعد الحل إذا كان التسارع يماكس السرعة .
- 3 ( اكتب بصورة عامة عبارة المسافة المقطوعة  $x$  بدلالة الزمن  $t$  .

### المسألة ( I - 2 ) :

تنطلق سيارة من وضع السكون ونصل سرعتها  $60$  كيلومتراً في الساعة بعد  $15$  ثانية ، افترض أن تسارعها ثابت واحسب قيمته . .  
احسب الزمن الذي تستغرقه حتى تصبح سرعتها  $80$  كيلومتراً في الساعة .  
ما هي المسافة التي تكون السيارة قد قطعها عندئذ :

### المسألة ( I - 3 ) :

تتحرك سيارة على طريق مستقيم  $ox$  حركة متسارعة بانتظام . في اللحظة  $t_1$  كانت في الموضع  $x_1$  وفي اللحظة  $t_2$  كانت في الموضع  $x_2$  . بين ان تسارعها يعطى بالعلاقة :

$$a = \frac{2 (x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$$

### المسألة ( I - 4 ) :

تتحرك قاطرة من وضع السكون بتسارع ثابت قدره  $4 \text{ m/sec}$  ولمدة

4 ثوان . عندئذ تتابع سيرها لمدة عشر ثوان أخرى بحركة منتظمة . ثم بعد ذلك تطبق كوابح القاطرة ( الفرامل ) مسببة تباطؤاً منتظماً قدره  $8 \text{ m/sec}^2$  حتى تقف .

( 1 ) ارسم منحنيًا بيانيًا للسرعة بدلالة الزمن .

( 2 ) بين أن السطح المحصور بين المنحني ومحور الزمن يقيس المسافة المقطوعة .

#### المسألة ( I - 5 ) :

تتحرك سيارتان A , B باتجاه واحد بسرعتين  $V_A$  و  $V_B$  بالترتيب . وعندما تكون السيارة A خلف السيارة B بمسافة قدرها x تطبق السيارة الخلفية A كوابحها مسببة تباطؤاً قدره a . بين أنه حتى يحصل اصطدام بين السيارتين يجب أن يكون :

$$V_A - V_B > \sqrt{2ax}$$

#### المسألة ( I - 6 ) :

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة :

$$x = 16t - 6t^2$$

حيث x المسافة المقطوعة مقدرة بالأمتار و t الزمن مقدر بالثواني .

- ( 1 ) أوجد موضع الجسم في اللحظة  $t = 1 \text{ sec}$  .
- ( 2 ) في أية لحظة ( او لحظات ) يمر الجسم من المبدأ ؟
- ( 3 ) احسب السرعة الوسطى خلال الفترة الزمنية  $0 < t < 2 \text{ sec}$  .
- ( 4 ) أوجد العبارة العامة للسرعة الوسطى في المجال  $t_0 < t < t_0 + \Delta t$  .
- ( 5 ) احسب السرعة الآنية في كل من اللحظتين  $t = 0$  و  $t = 1$  .
- ( 6 ) أوجد المواضع التي يكون فيها الجسم ساكناً والأزمنة المرافقة لذلك .

7 ( أوجد العبارة العامة للتسارع الوسطي بين اللحظتين  $t_0, t_0 + \Delta t$  .

8 ( أوجد العبارة العامة للتسارع الآني في أية لحظة  $t$  .

9 ( متى ينعدم التسارع الآني ؟

10 ( ارسم على جملة محورين مستويين كلاً من  $x, v, a$  بدلالة  $t$  .

### المسألة ( I - 7 ) :

يعطى موضع جسم متحرك في مستو بدلالة الزمن بالمعادلتين :

$$x = A \sin \omega t \quad y = \cos \omega t$$

1 ( أوجد السرعة والتسارع في اللحظة  $t$  .

2 ( مثل على جملة محورين متعامدين كلاً من المسار وشعاعي السرعة والتسارع . واحسب التسارعين الناظمي والمماسي .

### المسألة ( I - 8 ) :

يتحرك جسم كتلته  $m$  حسب القانون التالي :

$$x'' = \frac{3}{m} \quad \text{و} \quad y'' = \frac{1}{m}$$

1 ( عين القوة المؤثرة على الجسم .

2 ( عين سرعة الجسم ومساره .

3 ( احسب اندفاعه الزاوي وعزم القوة المؤثرة عليه .

4 ( بين أن عزم القوة يساوي مشتق الاندفاع الزاوي بالنسبة للزمن .

5 ( احسب العمل الذي تقوم به القوة المطبقة على الجسم بين اللحظتين

$$t = 1 \quad \text{و} \quad t = 5$$

6 ( احسب دفع القوة بين هاتين اللحظتين .

7 ( احسب تغير الاندفاع الخطي بين هاتين اللحظتين . قارن مع نتيجة الطلب السادس .

8 ( احسب تغير الطاقة الحركية بين اللحظتين المذكورتين وقارن النتيجة بما حصلت عليه في الطلب الخامس .

افرض في كل ما سبق أن الجسم بدأ حركته من المبدأ بدون سرعة ابتدائية .

\* \* \*

## مسائل الفصل الثاني

### المسألة ( 1 - II ) :

لاعب كرة يضرب كرتة فتنتلق بسرعة قدرها  $15 \text{ m/sec}$  وبزاوية قدرها  $30^\circ$  مع الأفق . ولاعب كرة آخر يقف على مسافة  $50 \text{ m}$  من اللاعب الأول وفي نفس المستوي الشاقولي الذي يحوي مسار الكرة . في لحظة انطلاق الكرة بدأ اللاعب الثاني يجري باتجاهها .

- ( 1 ) احسب الحد الأدنى لسرعة اللاعب الثاني ليتمكن من الوصول إلى موضع سقوط الكرة على الأرض قبل ان تصله هي .
- ( 2 ) لاعب آخر من الفريق المضاد كان الى جانب الثاني في لحظة ضرب الكرة من قبل اللاعب الأول يجري بنفس اللحظة لكي يسبق الثاني ويتلقى الكرة برأسه وهي على ارتفاع مترين عن سطح الأرض . احسب سرعته اللازمة لذلك . افرض في كل ذلك أن كلا من اللاعبين يجري بسرعة ثابتة .
- ( 3 ) عين موضع التقاء اللاعب الأخير بالكرة .

### المسألة ( 2 - II ) :

- تحلق قاذفة قنابل أفقياً وعلى ارتفاع  $1-2 \text{ km}$  بسرعة قدرها  $180 \text{ km/hr}$
- ( 1 ) عين المكان الذي تقذف منه الطائرة قنابلها حتى تصيب هدفها . افرض أن الهدف مبدأ لجلة الاحداثيات .
  - ( 2 ) عين أيضاً اللحظة الزمنية التي يحصل عندها القذف معتبراً أن مبدأ الزمن يوافق مبدأ الاحداثيات .

( 3 ) ما هي سرعة القذيفة عندما تكون على ارتفاع  $200 \text{ m}$  عن سطح الأرض وعندما تصطدم بالأرض ؟

( 4 ) ما هي زاوية سرعة القذيفة عندما تصطدم بالأرض ؟

#### المسألة ( 3 - II ) :

تطلق قذيفة من مدفع بزاوية  $35^\circ$  مع الأفق وتصطدم بالأرض بعد أن تقطع مسافة أفقية قدرها  $4 \text{ km}$  . احسب :

( 1 ) سرعتها الابتدائية .

( 2 ) زمن الرمي .

( 3 ) أقصى ارتفاع تصله القذيفة .

( 4 ) سرعتها عند أقصى ارتفاع .

#### المسألة ( 4 - II ) :

يتحرك مدفع على قمة جبل ارتفاعه  $200 \text{ m}$  ويقذف قنبلة بسرعة قدرها  $400 \text{ m/sec}$  وبزاوية قدرها  $30^\circ$  فوق الأفق .

( 1 ) احسب المدى الأفقي للقذيفة .

( 2 ) إذا كانت في السهل سيارة تتجه باتجاه المدفع وبسرعة  $100 \text{ km/hr}$  وفق مسار أفقي مستقيم واطلق المدفع قنبلة فأصابت السيارة ، على أي بعد كانت السيارة في لحظة الإطلاق ؟

( 3 ) أعد حل المسألة عندما تكون زاوية القذف  $30^\circ$  تحت الأفق وتكون السيارة منطلقة بحيث تعتمد عن المدفع .

#### المسألة ( 5 - II ) :

يقذف مظلي من طائرة تحلق على ارتفاع  $3 \text{ km}$  بسرعة قدرها  $300 \text{ km/hr}$  .

ونفرض ان المظلة تفتح فوراً ( للتسهيل ) . كما نفرض أيضاً أن مقاومة الهواء للمظلة هي :

$$\vec{F}_r = 10 \vec{v}$$

وأن كتلة المظلي مع مظلته هي 60 kg .

- ( 1 ) اكتب معادلات حركة المظلي .
- ( 2 ) احسب السرعة الحدية للهبوط ولحظة بلوغها ومكانه .
- ( 3 ) احسب لحظة سقوط المظلي على الأرض .

#### المسألة ( 6 - II ) :

يتوضع مدفع عند قاعدة سطح جبل ميله  $20^\circ$  مع الأفق ويطلق قذيفة بسرعة ابتدائية  $v$  تصنع مع الأفق زاوية  $40^\circ$  . أوجد مدى القذيفة على السفح ، أي المسافة المقطوعة على السفح المائل .

#### المسألة ( 7 - II ) :

تطلق طائرة معادية على ارتفاع  $h$  وبسرعة  $v$  . وفي اللحظة التي كانت فوق مدفع آلي رابض على الأرض أطلق هذا المدفع قذيفة بسرعة  $v$  وزاوية تسديد  $\theta$  مع الأفق . عين الحد الأدنى للسرعة  $v$  وقيمة زاوية التسديد  $\theta$  حتى تصاب الطائرة .

#### المسألة ( 8 - II ) :

تطير طائرة على ارتفاع 1 km وبسرعة 200 km/hr . ترمي هذه الطائرة قذيفة بقصد اصابة باخرة تسير بنفس الاتجاه وبسرعة قدرها 20 km/hr . بين انه حتى تصاب الباخرة يجب أن تكون المسافة الأفقية بينها وبين الطائرة

730 m . أعد حل المسألة واحسب المسافة بينها عندما تكون الباخرة تسير باتجاه معاكس .

### المسألة ( 9 - II ) :

بين أنه في الحركة المستوية تحت تأثير قوة ثابتة ( وبالتالي تسارع ثابت ) تكون العلاقاتان التاليتان صحيحتين :

$$v^2 = v_0^2 + 2 \vec{a} \cdot ( \vec{r} - \vec{r}_0 )$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2} ( \vec{v} + \vec{v}_0 ) t$$

\* \* \*



## مسائل الفصل الثالث

### المسألة (III - 1) :

يتحرك جسيم كتلته  $m$  تحت تأثير القوة المركزية .

$$\vec{F} = f(r) \vec{r}_1$$

حيث  $\vec{r}_1$  شعاع الواحدة الممول على شعاع الموضع ، وحيث مركز القوة ينطبق على مبدأ الاحداثيات  $O$  . في لحظة البدء  $t = 0$  كان الجسيم في الموضع  $(r_0, \theta_0)$  وكانت سرعته  $\vec{v}_0$  مماسة لكرة مركزها  $O$  .

( 1 ) بين أن حركة الجسيم مستوية وخاضعة لقانون السطوح .

( 2 ) احسب السرعة السطحية في أية لحظة  $t$  بدلالة  $r_0, \theta_0, v_0$  .

### المسألة (III - 2) :

برهن أنه اذا كان الجسيم ذو الكتلة  $m$  متحركاً على قطع ناقص تحت تأثير حقل مركزي متناسب عكساً مع مربع البعد .

$$\vec{F} = - \frac{D}{r^3} \vec{r}_1$$

فإن سرعته تعطى بالعلاقة :

$$v^2 = \frac{D}{m} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

حيث  $D$  ثابت ،  $a$  نصف المحور الكبير للقطع و  $\vec{r}$  شعاع موضع الجسم الذي شعاع واحدته هو  $\vec{r}_1$  .

المسألة ( III - 3 ) :

برهن باتباع طريقة شعاعية أن مسار كوكب حول شمس هو قطع ناقص بشكل مركز الشمس أحد محرقيه .

المسألة ( III - 4 ) :

يتحرك جسم مادي  $P$  كتلته  $m$  على دائرة نصف قطرها  $a$  وتمر من مركز الحقل  $O$  الذي يخضع له الجسم . أوجد عبارة القوة  $f(r)$  .

المسألة ( III - 5 ) :

إذا كانت معادلة مسار جسم في حقل مركزي هي :

$$r = c \sqrt{\cos 2\theta}$$

حيث  $r, \theta$  الاحداثيان القطبيان للجسم وحيث  $C$  ثابت موجب فانه يطلب تعيين عبارة القوة  $f(r)$  .

المسألة ( III - 6 ) :

يتحرك الجسم المادي  $P$  ذو الكتلة  $m$  في حقل قوى مركزي مركزه  $O$  وممطى بالملاقة :

$$\vec{F} = \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{r}_1$$

حيث  $r, \theta$  الاحداثيان القطبيان للجسم و  $\vec{r}_1$  شعاع واحدة موضعه .

في اللحظة  $t = 0$  كان الجسم في الموضع  $(r_0, \theta_0)$  وكانت سرعته  $\vec{v}_0$  تصنع مع  $\vec{r}_0$  زاوية قدرها  $2\theta_0$  .

- 1) استخرج عبارتي السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية .
- 2) اكتب معادلات الحركة بدلالة الاحداثيين  $r, \theta$  والزمن  $t$  .
- 3) بين أن الحركة خاضعة لقانون السطوح واحسب السرعة السطحية بدلالة  $r, \theta, v$  .



## مسائل الفصل الرابع

### المسألة ( 1 - IV ) :

AB قضيب رفيع متجانس طوله  $2a$  وكثافته الخطية  $\sigma$  وثقلته  $m$

( 1 ) وضعت كتلة  $m$  على استقامته وعلى بعد ما من طرفه A . احسب قوة جذب القضيب AB للكتلة  $m$  .

( 2 ) اذا كانت  $m$  كتلة نقطية على بعد  $x$  من الكتلة  $m$  . ما هو البعد  $x$  الذي من أجله تكون قوة التجاذب بين  $m$  و  $m$  مساوية للقوة المحسوبة في الطلب الأول ؟

( 3 ) توضع الكتلة  $m$  في موضع P خارج استقامة القضيب وعلى بعد  $b$  منه بحيث ترى نهايتاه A , B ضمن زاويتين  $\alpha$  ,  $\beta$  مع ناظم القضيب المار من P . احسب قوة جذب القضيب لـ  $m$  .

( 4 ) ناقش الحالات المختلفة للطلب الثالث واستنتج بصورة خاصة حالة قضيب لا متناه في الطول .

### المسألة ( 2 - IV ) :

سلك رفيع متجانس على شكل قوس دائري نصف قطره R ومركزه O وزاويته المركزية  $\theta$  . برهن أن قوة جذب السلك لكتلة نقطية  $m$  في المركز O ذات شدة :

$$|\vec{F}| = \frac{2 G m m}{R^2} \frac{\sin ( \theta/2 )}{\theta}$$

حيث  $m$  كتلة السلك . ثم ناقش الحالتين  $\theta = \pi/2$  و  $\theta = \pi$  .

#### المسألة ( 3 - IV ) :

بمقارنة نتائج المسألتين الأخيرتين بين أنه يمكن الاستعاضة عن القضيب AB بقوس له كثافة القضيب ومركزه P ويمس القضيب ( أي نصف قطره b ) ونهايتاه واقمتان على PA , PB .

#### المسألة ( 4 - IV ) :

حلقة نصف دائرية مستوية مركزها O ونصفا قطريها الداخلي  $R_1$  والخارجي  $R_2$  وكثافتها السطحية المتجانسة  $\sigma$  .

( 1 ) أحسب قوة جذب هذه الحلقة لكلمة m في مركزها O .

( 2 ) ناقش الحالات المختلفة حسب قيم  $R_2, R_1$  .

( 3 ) أعد الحل إذا استعصنا عن الحلقة بقبة كروية نصفها قطريها  $R_1, R_2$  وكثافتها الحجمية  $\sigma$  .

( 4 ) أعد الحل في الحالتين إذا كانت الكثافة متناسبة مع مربع البعد عن O .

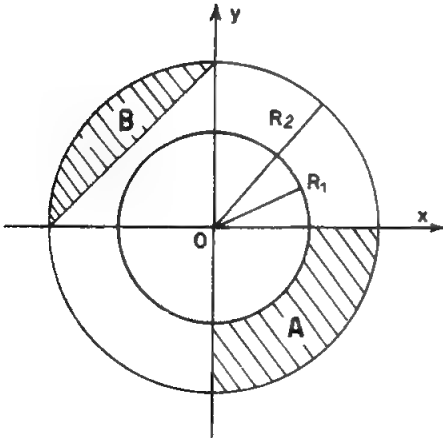
#### المسألة ( 5 - IV ) :

يمثل الشكل المرافق صفيحتين B, A مستويتين ومتجانستين كثافة كل منها السطحية  $\sigma$  .

( 1 ) احسب القوة  $\vec{F}_A$  التي تؤثر بها الصفيحة A على الكتلة m الموضوعة في O .

( 2 ) احسب كذلك القوة  $\vec{F}_B$  التي تؤثر بها الصفيحة B على هذه الكتلة .

( 3 ) عين العلاقة بين  $R_2, R_1$



التي من أجلها تنعدم محصلة القوتين  $\vec{F}_A$  و  $\vec{F}_B$  على الكتلة  $m$  في  $O$  .

**المسألة ( 6 - IV ) :**

1 ) أحسب قوة الجذب التي تؤثر بها كتلتان متساويتان كل منهما  $m$  مفصولتان بمسافة ثابتة  $a$  على كتلة أخرى  $m_1 = 1g$  في موضع ما لا على التمييز .

2 ) أحسب أيضاً كون هذه القوة .

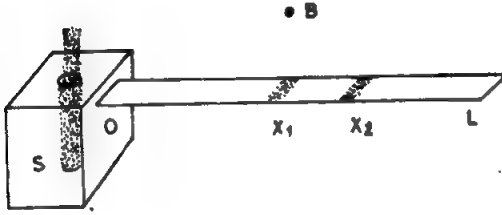
3 ) ادرس تعبيرات القوة والكمون وارسم خطوط القوة ومسطوح سوية الكمون .

\* \* \*

## مسائل الفصل الخامس

### المسألة ( V - 1 ) :

بقذف بروتون بطاقة حركية قدرها  $T_1$  ويدخل حقلاً مغناطيسياً شدة تحريضه  $B$  متعامد مع سرعته فيرسم اعتباراً من نقطة دخوله الحقل مساراً دائرياً نصف قطره  $R$ . نضع لوحة تصوير حساسة  $L$  عرضها مواز لـ  $B$  وطولها متعامد معه. ونضع إلى جانبها بوتقة رصاصية فيها مادة مشعة  $S$  كما يبين الشكل المجاور. تطلق المادة



المشعة صنفين من جسيمات « . الصنف الأول ذو طاقة حركية  $T_1$  والثاني ذو طاقة  $T_2$  ، حيث  $T_1 > T_2$  ، مجهولتان ، وحيث أن الاتجاه الذي تنطلق به الجسيمات لدى خروجها من البوتقة متعامد مع اللوحة ومع  $B$  . وبعد تحييز اللوحة لاحظ أثر الجسيمات في المنطقتين المشار إليهما على الشكل واللتين تبعدان عن فوهة البوتقة مسافتين  $X_1$  ،  $X_2$  على الترتيب . احسب  $T_1$  ،  $T_2$  بصورة عامة ، ثم قدرهما بالمليون فولط الكتروني علماً بأن :

$$R_0 = 10 \text{ cm}, \quad T_0 = \text{ , Mev}, \quad X_1 = 15 \text{ cm}, \quad X_2 = 25 \text{ cm}$$

### المسألة ( V - 2 ) :

نستعمل مسرعاً رحولياً ( سيكلوترون ) نصف قطر رحاه  $R$  وشدة التحريض المغناطيسي فيه  $B$  ، وشدة الحقل الكهربائي المتناوب بين نصفيه  $E$  ، ونود تسريع الالكترونات بواسطة هذا المسرع . فإذا كانت  $e$  شحنة

الالكترون و  $m$  كتلته و  $v$  سرعته الابتدائية فيطلب الاجابة على ما يلي :

( 1 ) عين بمد منبع الالكترونات عن المركز الهندسي للسرع حتى يكون هذا المركز مركزاً للدائرة التي يرسمها الالكترون في نصف دورته الأولى .

( 2 ) احسب السرعة الزاوية للالكترون داخل السرع .

( 3 ) احسب دور حركته .

( 4 ) عين مقدار الطاقة التي يكتسبها الالكترون في كل مرة يجتاز فيها المسافة  $X$  الفاصلة بين نصفي السرع .

( 5 ) عين الطاقة المكتسبة بمد اجتياز المسافة المذكورة  $n$  مرة ، واحسب الطاقة الحركية للالكترون عندئذ .

( 6 ) احسب مقدار ازدياد مربع نصف قطر مسار الالكترون من جراء اجتيازه للمسافة  $X$  .

( 7 ) احسب عدد النورات التي يدورها الالكترون قبل أن يخرج من السرع .

( 8 ) ما هي الطاقة العظمى التي يخرج بها الالكترون من السرع ؟

( 9 ) ما هو الزمن الكلي الذي يقضيه الالكترون في السرع ؟

★ ★ ★



## مسائل الفصل السادس

### المسألة (VI - 1) :

برهن أن التسارع الزاوي المقيس في الجلة المطالية يساوي التسارع الزاوي المقيس في الجلة اللاعطالية .

### المسألة (VI - 2) :

الجلة oxyz لاعطالية ندور بالنسبة إلى الجلة المطالية OXYZ بسرعة زاوية مطاة بشماع الدوران :

$$\vec{\omega} = 2t \vec{i} - t^2 \vec{j} + (2t + 4) \vec{k}$$

حيث  $t$  الزمن و  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  أشعة واحدة محاور الجلة اللاعطالية .  
إذا كان شماع موضع المتحرك بالنسبة لراصد في الجلة اللاعطالية مطى بالملقة :

$$\vec{r} = (t^2 + 1) \vec{i} - 6t \vec{j} + 4t^2 \vec{k}$$

فاحسب :

(1) سرعة المتحرك الظاهرية وسرعته الحقيقية في اللحظة  $t$  .

(2) تسارع المتحرك الظاهري وتسارعه الحقيقي في اللحظة  $t$  .

(3) طبق عددياً فيما سبق من أجل  $t=1$  .

### المسألة (VI - 3) :

قضيب شاقولي AB يدور حول استقامته الشاقولية بسرعة زاوية ثابتة

$\omega$  ، وقد ثبت في نقطة O منه طرف خيط دقيق طوله L مهمل الكتلة وغير قابل للامتطاط . يحمل الخيط في طرفه الآخر كتلة m . احسب قوة شد الخيط T والزاوية  $\theta$  التي يصنعها الخيط في حالة استقرار الحركة .

#### المسألة ( 4 - VI ) :

أنبوب مفرع AOB يدور حول النقطة O منه في مستو شاقولي وبسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  . وتحرك داخل الأنبوب كرة صغيرة P كتلتها m بدون احتكاك .

- ( 1 ) أدرس حركة هذه الكرة مفترضاً أنها نقطة .
- ( 2 ) بين أن الكرة تتحرك تحت شروط معينة ( يطلب تمييزها ) حركة اهتزازية بسيطة داخل الأنبوب .
- ( 3 ) ماذا يحدث للكرة إذا لم تتحقق تلك الشروط ؟ صف حركتها عندئذ .

#### المسألة ( 5 - VI ) :

يسقط جسم على الأرض من ارتفاع صغير ( بالنسبة لنصف قطرها ) وبدون سرعة ابتدائية . نفرض أن الزاوية التي يصنعها المحور المتجه من مركز الأرض نحو مكان السقوط مع محور الأرض المتجه من الجنوب إلى الشمال هي  $\lambda$  . كما نفرض أن سرعة دوران الأرض حول نفسها ثابتة  $\omega$  .

- ( 1 ) بين أن الجسم بعد مرور زمن  $t$  من بدء السقوط يكون قد انحرف عن الشاقول المار من موضع البدء مسافة قدرها  $(g \sin \lambda) t^3 / 3$  نحو الشرق .

- ( 2 ) بين استناداً إلى هذه النتيجة أن الجسم الساقط من ارتفاع H فوق سطح الأرض يصطدم بها في نقطة تبعد مسافة :

$$( 2H \sqrt{2H \omega \sin \lambda} ) / ( 3\sqrt{g} )$$

إلى الشرق من نقطة تقاطع الشاقول المار من موضع بدء السقوط مع سطح الأرض .

### المسألة ( 6 - VI ) :

لنفرض أننا في المكان O من النصف الشمالي للكرة الأرضية وأن شاقول هذا المكان الصاعد يصنع زاوية  $\alpha$  مع محور الأرض SN .

1 ) في اللحظة  $t=0$  يبدأ تيار هوائي بالحركة متجهاً نحو الشمال . بين أن هذا التيار سينحرف عن اتجاه الشمال ( اتجاهه الأصلي ) وعين الجهة التي ينحرف نحوها ( شرقاً أم غرباً ) .

2 ) أعد السؤال إذا كانت جهة التيار الابتدائية نحو الجنوب .

3 ) كرر السؤال أيضاً في الحالتين التاليتين :

أ ) الاتجاه الابتدائي للتيار نحو الشرق .

ب ) الاتجاه الابتدائي للتيار نحو الغرب .

وبين في كل من الحالتين أن التيار سينحرف شمالاً أو جنوباً وحدد جهة هذا الانحراف .

4 ) إذا حدث انخفاض جوي في المكان المذكور فإن الريح تتجه نحوه من جميع المناطق المجاورة وذات الضغوط الأعلى وتشكل انحصاراً دورانياً في ذلك المكان . هل يمكنك على ضوء ما تقدم أن تفسر الحركة الدورانية للأعصار وأن تحدد جهة دورانه ؟

5 ) لو حصل الانخفاض الجوي في مكان آخر في النصف الجنوبي للكرة الأرضية فما هي جهة دوران الأعصار الناتج ، ولماذا ؟

6 ) على ضوء النتائج السابقة فقط هل يمكن أن نعتبر المنطقة الاستوائية منطقة تكثر فيها الأعاصير أم العكس ، ولماذا ؟

( 7 ) هل تستطيع إعطاء فكرة واضحة عن توزيع الرياح عند خط الاستواء والمنطقتين المجاورتين له من الشمال ومن الجنوب ، وذلك على ضوء كل ما تقدم من نتائج في هذه المسألة .

#### المسألة ( VI - 7 ) :

في مكان ما من نصف الارض الشمالي زاوية ثابتة الصاعد مع محور الارض هي  $\lambda$  . ينساب في هذا المكان باتجاه الشمال نهر عرضه  $D$  انسياباً هادئاً .

1 ) بين ان مستوى الماء عند الضفة اليسرى للنهر أعلى منه عند الضفة اليمنى بالمقدار :

$$d = \frac{2D\omega v_0 \cos \lambda}{\sqrt{\frac{2}{g + 4\omega^2 v_0^2 \cos^2 \lambda}}}$$

( 2 ) بين أن النتيجة السابقة يمكن أن نأخذ شكلاً تقريبياً :

$$d \cong 2 D \omega v_0 \cos \lambda / g$$

وعلى سبب ذلك .

( 3 ) تطبيق عددي :  $\lambda = 45^\circ$  ,  $D = 2\text{km}$  ,  $v_0 = 5\text{km/hr}$  وبفرض في كل ما تقدم أن  $g$  هو التسارع الارضي و  $\omega$  سرعة دورانها الزاوية و  $v_0$  سرعة ماء النهر في المكان المذكور .

#### المسألة ( VI - 8 ) :

تطلق قذيفة من طائرة على ارتفاع  $h$  من مكان  $O$  في النصف الشمالي لكرة الارضية زاوية شاقوله الصاعد مع محور الارض  $SN$  هي  $\lambda$  . نفرض أن سرعة القذيفة شاقولية وقدرها  $v$  وان سرعة دوران الارض  $\omega$  ثابتة .

1 ( بين ان القذيفة بعد مرور فترة زمنية  $t$  على لحظة اطلاقها تبتمد عن الشاقول المار من موضع اطلاقها مقدار :

$$d = \frac{1}{g} \omega \sin \lambda (2gt^3 - 6v_0 t - 12ht)$$

2 ( بين أن القذيفة تصطدم بالارض في مكان يبعد عن شاقول موضع البدء مسافة قدرها :

$$d_0 = \frac{1}{g} \omega \sin \lambda \left( \frac{2c^3}{g^3} - \frac{6v_0 c^2}{g^2} - \frac{12hc}{g} \right)$$

حيث :

$$C = v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

3 ( تطبيق عددي :

$$\lambda = 60^\circ, v_0 = 100 \text{ km/hr}, g \approx 10 \text{ m/sec}^2$$

ملاحظة : تهمل في جميع حلول المعادلات التفاضلية المقادير التي تحوي قوى اكبر او تساوي 2 للمقدار  $\omega$ .

### المسألة (VI - 9) :

تطلق قذيفة باتجاه الجنوب من موضع زاوية شاقوله مع محور الارض  $\lambda$  بسرعة ابتدائية  $v_0$  تصنع مع الافق الزاوية  $\alpha$ . ونفرض ان سرعة دوران الارض حول نفسها ثابتة وتساوي  $\omega$ .

1 ( أوجد موضع القذيفة بعد مرور زمن  $t$  على لحظة الاطلاق .

2 ( برهن ان القذيفة تكون قد انحرفت عندئذ مسافة :

$$d = \left( \frac{1}{3} \omega g \sin \lambda \right) t^3 - \omega v_0 \cos (\alpha - \lambda) t^2$$

اعتباراً من المستوي الشاقولي المار من موضع البدء والحاوي للسرعة الابتدائية .

( 3 ) بين ان موضع اصطدام القذيفة بالارض يبعد مسافة قدرها :

$$s = \frac{4 \omega v_0^3}{3 g^2} \sin^3 \alpha ( 3 \sin \alpha \sin \lambda - \cos \alpha \cos \lambda )$$

وذلك إلى الشرق من موضع سقوطها فيما لو اهملت حركة الارض الدورانية حول نفسها .

## مسائل الفصل السابع

### المسألة ( VII - 1 ) :

أوجد مركز كتلة الجسم المتجانس المحصور بين المستويات الاحداثية  
 $x = 0$  و  $y = 0$  و  $z = 0$  والمستوى  $x + y + z = a$ .

### المسألة ( VII - 2 ) :

أوجد مركز كتلة قبة نصف كروية . متجانسة كتلتها  $M$  ونصف قطرها  $r$  في الحالتين التاليتين :

1- القبة جوفاء .

2 ( القبة صماء .

### المسألة ( VII - 3 ) :

أوجد مركز كتلة مثلث  $ABC$  متجانس كتلته  $M$  في الحالات التالية :

1 ( الكتلة موزعة بانتظام على أضلاعه .

2 ( الكتلة موزعة بانتظام على سطحه .

### المسألة ( VII - 4 ) :

أوجد مركز كتلة صفيحة مستطيلة الشكل  $ABCD$  كثافتها السطحية  $\sigma$  متناسبة مع البعد عن أحد المرضين . أعد المسألة إذا كانت الكثافة متناسبة مع كل من البعدين الموازيين للطول والمرض .

### المسألة ( VII - 5 ) :

سلك معدني متجانس ثني على شكل قوس دائري مركزه  $O$  ونصف قطره  $R$  ويرى من مركز وفق الزاوية  $\alpha$  .

( 1 ) عين إحداثيي مركز كتلته على جملة محاورين  $oxy$  بحيث أن المحور  $oy$  يشكل محور تناظر للقوس .

( 2 ) ادرس تحولات احداثيي مركز الكتلة  $x_c$  و  $y_c$  بدلالة الزاوية  $\theta$  عندما تتحول هذه الزاوية بين  $0$  و  $\pi$  .

( 3 ) ارسم منحنيّاً بيانياً يمثل هذه التحولات .

### المسألة ( 6 - VII )

لدينا  $n$  مجموعة من النقاط المادية ( الجسيمات ) . مراكز كتل هذه المجموعات تمين بأشعة مواضعها  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  . ولتكن كتل هذه المجموعات  $M_1, M_2, \dots, M_n$  . إذا شكلنا من هذه المجموعات كلها مجموعة جديدة برهن ان مركز كتلة هذه المجموعة يطى بشعاع موضعه  $\vec{r}_c$  المعطى بالعلاقة :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

استنتج من ذلك أنه لايجاد مركز كتلة مجموعة مادية يمكن أن تقسم هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية ونمين مراكز كتلها وزفق بكل مركز كتلة المجموعة الجزئية المرافقة ثم نمين مركز كتلة هذه المراكز فيكون الناتج مركز كتلة المجموعة الكلية .

### المسألة ( 7 - VII )

تألف مجموعة مادية من قرصين دائريين متجانسين مستويين ومتماسين في نقطة من محيط كل منها . نصف قطر الأولى  $R_1$  ونصف قطر الثانية  $R_2$  . أوجد احداثيي مركز كتلة هذه المجموعة .

( استفد من نتيجة المسألة السابقة في الحل ) .



### المسألة ( 8 - VII ) :

قرص دائري متجانس نصف قطره  $R$  . اقتطعنا منه قرصاً دائرياً آخر نصف قطره  $r$  بحيث أن القرص المقتطع يمس القرص المقطوع في نقطة من محيطه . احسب احداثيي مركز القرص المتبقي مستعيناً بمضمون المسألة قبل الأخيرة وبفهوم استمخال كتلة سالبة .

### المسألة ( 9 - VII ) :

جسم صلب مؤلف من اسطوانة دائرية صماء نصف قطرها  $R$  وارتفاعها  $H$  وقد لصق بها على قاعدتها نصف كرة صماء لها نصف القطر  $R$  نفسه .  
(1) احسب احداثيات مركز الكتلة للجسم الكلية مفترضاً ان الاسطوانة والكرة متجانستان ومتخذاً أحد المحاور الاحداثية محور تناظر للجسم .  
(2) أعد المسألة إذا كانت كثافة الاسطوانة متناسبة مع البعد عن قاعدتها الملاصقة للكرة .

### المسألة ( 10 - VII ) :

يتحرك جسمان ماديان كتلتاهما  $m_1$  ,  $m_2$  بحيث تكون سرعتهما النسبية ( أي سرعة أحدهما بالنسبة للآخر ) هي  $\vec{v}$  وسرعة مركز كتلتها هي  $\vec{v}_c$  .  
بين ان الطاقة الحركية الكلية لهما تعطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

حيث  $\mu$  هي الكتلة المختزلة والتي تعطى بالعلاقة :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

### المسألة ( 11 - VII ) :

إذا كانت  $m$  كتلة القمر و  $\vec{\Omega}_m$  اندفاعه الزاوي حول الأرض وكانت

M كتلة الأرض فاحسب الاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  لمجموعة الأرض والقمر في حركتهما حول مركز كتلتهما C ، وبين أن هذا الاندفاع الزاوي يعطى بالملاقة :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_m \frac{M}{m + M}$$

#### المسألة ( VII - 12 ) :

مجموعة صلبة مؤلفة من اسطوانة صماء نصف قطرها R وارتفاعها H ونصف كرة لها نصف القطر R ذاته وملصقة بقاعدة الاسطوانة وضمت هذه المجموعة على طرفها الكروي فوق مستو أفقي . عين وضع توازن المجموعة وبين أن شرط استقرار هذا التوازن هو أن تتحقق المتراجمة .  $R / H > \sqrt{2}$

#### المسألة ( VII - 13 ) :

ثبت طرفا سلسلة منتظمة بنقطتين A و B ثابتتين في مستو أفقي واحد . أوجد معادلة الشكل الهندسي الذي تأخذه السلسلة بعد أن تتوازن . أعد الحل مفترضاً أن الكثافة الخطية للسلسلة تتناسب طردياً مع المسافة الأفقية اعتباراً من شاقول التناظر في وضع التوازن .

#### المسألة ( VII - 14 ) :

لتكن  $m_1$  و  $m_2$  و  $m_3$  كتل ثلاث جسيمات تتحرك بسرر نسبية  $v_{12}$  و  $v_{23}$  و  $v_{31}$  فيما بينها .

(1) احسب الطاقة الحركية لمجموعة الجسيمات الثلاث بدلالة كتلتها وسرعتها النسبية .

(2) عمم النتيجة على مجموعة مؤلفة من N جسيم .

### المسألة ( 15 - VII ) :

تتحرك الكتلتان  $m_1$  و  $m_2$  على مستويين مائلين متعاكسين زاويتا ميلهما مع الأفق هما  $\theta_1$  و  $\theta_2$  وبدون احتكاك . وترتبط الكتلتان ببعضها بواسطة خيط عديم الكتلة وعديم الامتطاط ويمر على بكرة صغيرة A عند الفصل المشترك للمستويين المائلين . ونفترض أن البكرة عديمة الكتلة وأن حركتها تتم بدون احتكاك .

(1) استخدم مبدأ العمل الافتراضي لتبرهن أن شرط التوازن هو :

$$m_1 \sin \theta_1 = m_2 \sin \theta_2$$

(2) استخدم فكرة الكون للاجابة على السؤال الأول .

(3) استخدم مبدأ دالمبير للدراسة حركة جملة الكتلتين .

### المسألة ( 16 - VII ) :

للقضيب AB كتلة M وطول L . تستند نهايته A إلى جدار شاقولي وبدون احتكاك كما ترتبط نهايته B بخيط طوله a ، مثبت طرفه الآخر بنقطة O ثابتة من الجدار وبحيث يكون مستوى النقطة A تحت مستوى O ويكون مستوى B تحت مستوى A . ولتكن كذلك زاوية الخيط مع الشاقول المائل هي  $\alpha$  وزاوية القضيب مع الشاقول نفسه هي  $\beta$  . برهن أن القضيب يتوازن إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$\sin^2 \alpha = (4L^2 - a^2) / 3a^2$$

$$\sin^2 \beta = (4L^2 - a^2) / 3L^2$$

وذلك بطريقتين :

(1) باستعمال مبدأ العمل الافتراضي .

(2) باستعمال مفهوم الكون .

### المسألة ( 17 - VII ) :

يطفو زورق على سطح ماء بحيرة ساكنة . ثبت على سطحه مستو مائل

على الأفق بزاوية  $\theta$  وطوله  $L$  وطرفه المنخفض يلامس الماء . تركت قطعة جليد كبيرة تتزنق على المستوي المائل بدون احتكاك . ونفترض أن الزورق يستطيع الانزلاق على سطح الماء دون مقاومة . كما نفترض أن قطعة الجليد كانت في لحظة البدء عند رأس المستوى المائل وكان القارب ساكناً وانطلقت القطعة بدون سرعة ابتدائية . بين أن قطعة الجليد تلامس الماء بعد فترة زمنية قدرها .

$$t = \left[ \frac{2 L (M + m \sin^2 \theta)}{g (M + m) \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث  $M$  كتلة القارب مع حمولاته باستثناء قطعة الجليد وحيث  $g$  قيمة التسارع الأرضي .

#### المسألة ( VII - 18 ) :

تنطلق رصاصة كتلتها  $m$  من بندقية بسرعة  $v$  فتصيب قطعة من الخشب كتلتها  $M$  موضوعة على مستو أفقي تستطيع الانزلاق عليه بدون احتكاك، وتستقر الرصاصة في قطعة الخشب .

- (1) احسب سرعة قطعة الخشب مع الرصاصة المستقرة فيها .
- (2) احسب الطاقة الضائعة التحويلة إلى حرارة بسبب الاصطدام .
- (3) أعد المسألة إذا كانت قطعة الخشب حين اصابتها بالرصاصة متحركة بسرعة  $v_1$  بعيداً عن البندقية .

#### المسألة ( VII - 19 ) :

تشكل على الأرض طبقة رقيقة من النار سمكها  $h$  صغير جداً بالنسبة لنصف قطر الأرض  $R$  ، وذلك بسبب تساقط أجسام من الفضاء عليها ومن جميع الجهات وفي جميع الاتجاهات . احسب التغير الناتج في طول اليوم الأرضي نتيجة لتشكيل هذه الطبقة ممناً ما إذا كان هذا التغير يزيد في

طول اليوم او ينقصه ومفترضاً أن الارض متجانسة وكثافتها  $D$  وان طبقة  
الغبار متجانسة ومنتظمة التوزيع وكثافتها  $d$  .

#### المسألة ( VII - 20 )

لدينا قرص دائري كتلته  $M$  ونصف قطره  $R$  . يستطيع هذا القرص  
أن يدور في مستو أفقي حول احد مولداته الشاقولية  $B$  . أي حول محور  
شاقولي يمر من نقطة من محيطه . يقف على طرف هذا القرص رجل  $II$   
كتلته  $m$  . في اللحظة  $t = 0$  كان القرص والرجل ساكنين تماماً . وفي  
تلك اللحظة بدأ الرجل يمشي على غيط القرص واستمر بالمشي حتى قطع  
دورة كاملة على القرص . عين موضع القرص في لحظة إتمام الرجل دورته  
حول القرص .



## مسائل الفصل الثامن

### المسألة ( 1 - VIII )

صاروخ نفاث كتلته الكلية مع وقوده هي  $M_0$  وينفث الوقود المحترق بنزارة قدرها  $\alpha$  وسرعة  $u$  ويتحرك ابتداء من السكون مبتعداً عن الأرض .

(1) احسب سرعة الصاروخ وبمده عن الأرض في أية لحظة ؛ أثناء عمل محركه باستمرار .

(2) إذا كانت كتلة الوقود الكلي هي  $M_0/2$  ففي توقف محركه عن العمل ؟

(3) ما هي سرعة الصاروخ في لحظة توقف المحرك عن العمل ( أي لحظة نفاد الوقود ) ؟

(4) ما هو بـمده عن الأرض في تلك اللحظة ؟

(5) ما هو أكبر بـمد يصله الصاروخ ومتى يصل إليه ؟

افرض في كل ما تقدم أن تسارع الثقالة الأرضية ثابت .

(6) اعد المسألة مفترضاً أن التسارع الأرضي متناسب عكساً مع مربع البـمد .

### المسألة ( 2 - VIII )

يتجه صاروخ نحو القمر حاملاً مركبة وملاحيهـا للهبوط على سطحه . وفي لحظة نـتـبـرـها مـبـدأ للزمن  $t = 0$  كان على ارتفاع  $H$  عن سطح القمر

وكانت سرعته  $v_0$  باتجاه مركزه . يستعمل الملاحون للهبوط على القمر برفق بحركات نفائفة تماكس حركة الصاروخ . فاذا فرضنا أن تسارع الجاذبية القمرية  $g_1$  ثابت وأن سرعة انفلات الوقود المحترق  $u$  وغزارته  $\alpha$  أثناء جميع مراحل الهبوط فإن المطلوب هو تبين  $\alpha$  ليتم الهبوط برفق تام .

#### المسألة ( 3 - VIII )

تصطدم كرتان كتلتا هما  $m_1$  و  $m_2$  وسرعتاهما  $v_1$  و  $v_2$  اصطداماً راسياً عامل رسوه  $e$  .

( 1 ) احسب الطاقة المتحركة إلى حرارة وعين قيمة  $e$  التي تجعل هذه الطاقة مساوية  $50\%$  من الطاقة الحركية الكلية للكرتين قبل اصطدامها .

( 2 ) احسب مقدار الاندفاع المتبادل بين الكتلتين  $m_1$  و  $m_2$  بسبب الاصطدام .

#### المسألة ( 4 - VIII )

تصطدم كرة كتلتها  $m$  بالأرض الأفقية بسرعة  $v$  تصنع مع سطح الأرض زاوية  $\theta$  .

( 1 ) احسب سرعة ارتداد الكرة  $v_1$  وزاويتها  $\theta_1$  مع الأرض مفترضاً أن عامل رسو الاصطدام ( عامل المرونة ) هو  $e$  .

( 2 ) إذا كان الاصطدام ناتجاً عن سقوط حر للكرة من ارتفاع  $H$  وإذا ارتدت نتيجة ذلك إلى نصف هذا الارتفاع فما هي قيمة عامل الرسو عندئذ ؟

#### المسألة ( 5 - VIII )

تسقط كرة معدنية على مستوى أفقي ثابت تماماً سقوطاً حراً من ارتفاع  $H$  فترتد عنه ثم تسقط عليه . ويتكرر الأمر حتى تقف مستقرة عليه . برهن أن

المسافة الكلية التي تقطعها الكرة منذ بدء سقوطها الاول إلى أن تستقر على المستوى  
الاقصى تعطي بالعلاقة :

$$S = H (1 + \epsilon^2) / (1 - \epsilon^2)$$

حيث  $\epsilon$  عامل مرونة اصطدام الكرة بالمستوي .

#### المسألة ( VIII - 6 )

صاروخ ممتد المراحل يحمل مركبة باتجاه المريخ ، الكتلة الكلية  
للساروخ والمركبة والوقود هي  $M$  . كتلة الوقود الكلي وحده  $m$  . وكتلة  
المحرك الاول  $m_1$  وغزارة انفلات الوقود المحترق  $a$  . وسرعة انفلاته  $u$  ،  
ينطلق الصاروخ من السكون بفعل محركه الاول الذي يستمر حتى يستهلك  
80 % من الوقود الكلي . عندئذ ينفصل المحرك الاول بفعل آلية خاصة  
طاقها  $E$  . المطلوب :

- (1) احسب سرعة الصاروخ وموضعه في لحظة توقف المحرك الاول !
- (2) احسب سرعة الصاروخ في لحظة انفصال المحرك الاول واحسب  
ايضاً سرعة المحرك المنفصل .
- (3) ما هو ازدياد الطاقة الحركية للصاروخ من جراء انفصال المحرك  
الثالث الاول ؟
- (4) ما هي السرعة النسبية للمحرك المنفصل بالنسبة للصاروخ ؟



## مسائل الفصل التاسع

### المسألة ( IX - 1 )

- المربع ABCD عبارة عن صفيحة معدنية متجانسة طول ضلعها  $a$  .  
نستعمل جملة محاور ثلاثة ، اثنان منها ينطبقان على ضلعي الصفيحة .  
(1) احسب عزوم عطالة هذه الصفيحة حول المحاور الاحداثية .  
(2) احسب مضارب العطالة حول تلك المحاور .  
(3) استنتج من الطلب الاول عزم العطالة حول محور ناظم على الصفيحة في مركز تناظرها .  
(4) احسب عزوم العطالة الرئيسية لهذه الصفيحة .  
(5) عين هذه المحاور .  
(6) احسب عزم عطالة الصفيحة حول محور في مستويها ويصنع زاوية قدرها  $30^\circ$  مع احد اضلاعها ماراً من احد رؤوسها .  
(7) اعد السؤال الاخير من أجل محور يوازي المحور المذكور ويمر من مركز تناظر الصفيحة ، أي مركز كتلتها .

### المسألة ( XI - 2 )

إذا كانت الصفيحة ABCD في المسألة السابقة مستطيلة الشكل ضلعها  $a$  ،  $b$  فأعد الاجابة على الاسئلة الخمسة الاولى فقط .

### المسألة ( XI - 3 )

بحجم قطع ناقص انصاف محاوره  $a$  ،  $b$  ،  $c$  ومعادلاته الديكارتيه :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- (1) عين محاور عطالته الرئيسية المارة من مركزه .
- (2) احسب عزوم عطالته الرئيسية حول تلك المحاور .
- (3) اذا كان  $a = b \neq c$  وكان  $a, b$  قريين من  $c$  بين أن :

$$(J_3 - J_1) / J_1 = 1 - c/a$$

حيث  $J_1 = J_2 \neq J_3$  هي عزوم العطالة الرئيسية المحسوبة في الطلب الثاني .

#### المسألة ( IX - 4 )

نرف عزم عطالة جسم S حول نقطة ما مثل P بأحدى العبارتين التاليتين :

$$I_p = \sum_i m_i r_i^2$$

أو :

$$I_p = \int r^2 dm$$

وذلك حسبما يكون الجسم متقطعاً أو مستمراً بالترتيب ، وحيث  $r, r_i$  يمثلان البعد عن النقطة P لمنصر المجموع أو التكامل . كما أننا نرف عزم عطالة الجسم حول مستو H بأحدى العبارتين التاليتين :

$$I_H = \sum_i m_i r_i^2$$

أو :

$$I_H = \int r^2 dm$$

حيث  $r, r_i$  يدلان على البعد عن المستوي H . ونلاحظ أن هذين التعريفين منسجمان مع تعريف عزم العطالة حول محور .

نمبر الآن عزم العطالة حول مبدأ الاحداثيات O وليكن  $I_0$  . ونمبر عزوم العطالة حول المحاور الاحداثية  $ox, oy, oz$  ولتكن هذه العزوم

$I_x, I_y, I_z$  . واخيراً نعتبر عزوم العطالة حول المستويات الاحداثية  $I_{ox}, I_{oy}, I_{oz}$  ، ولتكن هذه العزوم  $I_{oxy}, I_{oyz}, I_{ozx}$  .

(1) اكتب العبارة العامة التفصيلية لكل من هذه العزوم بدلالة الاحداثيات الديكارتية لنقاط الجسم في كل من الحالتين :

آ — الجسم متقطع .

ب — الجسم مستمر .

(2) استنتج من هذه العبارات وفي الحالتين أن :

$$I_o = I_{ox} + I_{oy} + I_{oz}$$

$$I_o = \frac{1}{2} [I_{ox} + I_{oy} + I_{oz}]$$

#### المسألة (5 - IX)

استخدم نتائج المسألة الاخيرة فما يلي :

(1) احسب عزم :طالة كرة جوفاء حول احد أقطارها ، ثم استنتج عزم عطالتها حول محور يمر بها .

(2) احسب عزم عطالة مكعب أجوف حول محور يمر من مركزي وجيهين متقابلين . استنتج بعد ذلك عزم عطالته حول أحد حروفه .

(3) اعد المسألة إذا كانت الكرة والمكعب أحمين .

(4) استخدم نتائج المسألة الاخيرة ايضاً حينما يصعب حساب عزوم العطالة حول المحاور وبسهل عن طريق حساب غير مباشر مستخدماً عزوم العطالة حول نقطة ( مثل مركز التناظر ) وحول بمض المستويات ( مثل مستويات التناظر أو المستويات الاحداثية ) .

#### المسألة (6 - IX)

احسب عزوم عطالة الاجسام المتجانسة التالية حول المحاور المشار اليها من أجل كل جسم :

(1) مستطيل ABCD مركزه O فرغ منه مستطيل آخر A'B'C'D'

مركزه O أيضاً والاضلاع متوازية ، ابادهما  $a, b$  للأول و  $a', b'$  للثاني .  
حول أحد محوري التناظر وحول الناظم في O .  
(2) مثلث ABC متساوي الاضلاع حول أحد أضلاعه وحول أحد الارتفاعات .

(3) مثلث ABC مختلف الأضلاع حول أحد أضلاعه .  
(4) مخروط دوراني نصف قطر قاعدته R وارتفاعه H حول محوره وحول قطر قاعدته .  
(5) معين حول كل من قطريه وحول ناظمه المار من مركزه وحول أحد أضلاعه وحول ناظمه المار من أحد رؤوسه .

#### المسألة ( 7 - IX )

الجلتان الاحداثيتان  $oxy$  و  $ox'y'$  قائمتان واقمتان في مستو واحد ولهما مركز واحد . الجسم الصلب S مستو وواقع في مستوي الجلتين ومنظم التوزيع الكتلي . لتكن P نقطة من هذا الجسم احداثياها في الجلة الأولى  $x, y$  وفي الجلة الثانية  $x', y'$  . ولتكن  $\theta$  الزاوية المحصورة بين المحورين  $ox, ox'$  .

(1) احسب  $x'$  و  $y'$  بدلالة  $x, y, \theta$  .  
(2) اكتب عبارة كل من عزوم المطالة حول المحاور الأربعة ولتكن

$$I_{ox}, I_{oy}, I_{ox'}, I_{oy'}$$

(3) بين أن :

$$I_{ox'} = I_{ox} \cos^2 \theta - 2 I_{xy} \cos \theta \sin \theta + I_{oy} \sin^2 \theta$$

$$I_{oy'} = I_{ox} \sin^2 \theta + 2 I_{xy} \cos \theta \sin \theta + I_{oy} \cos^2 \theta$$

حيث  $I_{xy}$  هو مضروب المطالة بالنسبة للمحورين  $ox$  و  $oy$  .  
(4) هل تتفق نتيجة الطلب الاخير مع مضمون نظرية المحاور المتعامدة ؟  
بين ذلك بالحساب .

## مسائل الفصل العاشر

### المسألة (X-1)

اسطوانة صماء نصف قطرها  $R$  وكتلتها  $M$  تتدحرج على مستو مائل يصنع مع الأفق زاوية  $\theta$  .

(1) استخراج معادلة حركتها وادرس الحركة مفترضاً عدم انزلاق الأسطوانة على المستوي المائل .

(2) عين المحل الهندسي للمركز الآني للدوران وعين المتدحرج والقاعدة في الحالتين التاليتين :

أ - لا يوجد انزلاق .

ب - يوجد انزلاق .

### المسألة (X-2)

اسطوانة كبيرة ثابتة محورها أفقي ونصف قطرها  $R$  . وضمت فوقها اسطوانة صغيرة نصف قطرها  $r$  وبحيث تماسان وفق المولدات . بدأت الاسطوانة الصغيرة تتحرك دون انزلاق وبدون سرعة ابتدائية .

(1) عين الموضع الذي تنفصل فيه الاسطوانة المتحركة عن الثابتة .

(2) استخراج معادلة الحركة ثم ادرسها .

(3) عين القاعدة والمتدحرج اللذين يرسمهما المحور الآني للدوران .

### المسألة (X-3)

يتألف جسم صلب من متوازي مستطيلات لصق على أحد وجوهه نصف اسطوانة . وضع فوق مستو أفقي بحيث يمسه وفق احد مولدات الاسطوانة .

(1) عين وضع التوازن واستنتج الشرط اللازم والكافي لكي يكون هذا التوازن مستقراً .

(2) اكتب معادلة الحركة وادرسها.

**السؤال (X-4)**

تقف سيارة على طريق مائل ومكابحها مشدودة . تربط بحبل بتوسطه بابض قوي ويثبت طوف الحبل الآخر بمود ثابت خلفه .

(1) تترك السيارة لتتحرك بارسال مكابها . اكتب معادلات الحركة وأدرسها .

(2) عين وضع التوازن وحدد نوعه .

مجلس اوقاف اللامپي

★ ★ ★

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

## مكتبتى الخاصة

**على موقع ارشيف الانترنت**

## الرباط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

## مسائل الفصل الحادي عشر

### المسألة ( XI - 1 )

إطار مستطيل الشكل ومستو . بهما مستطيله الخارجي  $a, b$  وبهنا مستطيله الداخلي  $a', b'$  . نعتبر محوري تناظره والمحور المتعامد معها محاور جملة أحداثية  $oxyz$  .

- (1) بين ان هذه المحاور هي محاور عطالة رئيسية للإطار .
- (2) احسب عزوم العطالة حول هذه المحاور .
- (3) عين مركبات الزدوجة  $\vec{L}$  على هذه المحاور بحيث ان هذه المزدوجة تجمل الاطار يدور حول احد قطريه بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  .

### المسألة ( XI - 2 )

قضيب صلب  $AB$  طوله  $L$  مهمل الكتلة ويحمل في طرفيه كتلتين متساويتين كل منها  $M$  . يدور هذا القضيب مع الكتلتين حول الشاقول  $oz$  المار من منتصفه  $O$  بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  وبحيث يصنع دوماً زاوية ثابتة  $\theta$  مع الشاقول .

- (1) برهن ان الاندفاع الزاوي  $\vec{\Omega}$  لهذه الجملة يرسم مخروطاً دورانياً حول  $oz$  وعين زاوية هذا المخروط .
- (2) احسب شدة الاندفاع الزاوي ودوره حول  $oz$  .

### المسألة ( XI - 3 )

قرص معدني دائري رقيق نصف قطره  $a$  يدور حول مركزه  $O$  الذي

يستند إلى رأس فضيب مدبب AO ثابت وشاقولي . يعطي هذا القرص سرعة زاوية ابتدائية  $\vec{\omega}_0$  تصنع مع ناظمه ( ناظم القرص ) ON زاوية  $\theta$  .  
 (1) برهن ان شعاع السرعة الدورانية  $\vec{\omega}$  لهذا القرص يدور حول الناظم ON بدور قدره  $2\pi/\omega_0 \cos\theta$  .

(2) برهن كذلك ان الناظم ON يرسم في الفراغ مخروطاً ( نسميه مخروط الناظم ) واحسب زاوية هذا المخروط .

(3) بين ان دور حركة المبادرة للناظم ( وهو الزمن اللازم للناظم ليرسم مخروطه في الفراغ مرة واحدة ) يساوي :

$$2\pi / \omega_0 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

#### المسألة ( XI-4 )

تتحرك دوامة متناظرة حول رأسها الثابت O في حقل الثقالة الارضية عزوم عطالة هذه الدوامة حول محاور ثلاثة متعامدة مارة من O هي  $I_1$  ،  $I_2$  ،  $I_3$  بحيث ان الاخير هو حول محور تناظرها ، وبلاحظ ان  $I_3 = I_2 \neq I_1$  .

- (1) احسب بدلالة زوايا اولير  $\varphi$  ،  $\theta$  ، و  $\psi$  مركبات سرعتها الدورانية الآتية على المحاور السابقة والمرتبطة بالدوامة .
- (2) استنتج الطاقة الحركية الدورانية والطاقة الكلية للدوامة .
- (3) اكتب معادلات الحركة .

(4) بين ان مسقطي الاندفاع الزاوي  $\Omega_z$  على المحور الشاقولي و  $\Omega_z'$  على محور تناظر الدوامة ثابتان .

(5) احسب السرعتين الزاويتين  $\varphi'$  و  $\psi'$  .



(6) بين ان  $\theta'$  تكتب بالشكل التالي :

$$\theta' = \sqrt{2 [C - U(\theta)] / I_1}$$

حيث  $C$  ثابت و  $U(\theta)$  تابع لـ  $\theta$  .

(7) ما هو عدد جنور المعادلة  $U(\theta) = C$  .

### المسألة (XI-5)

في الحركة الفراغية العامة للدوامة .

- (1) اوجد الشرط اللازم لكي يتحرك محورها حركة مبادرة منتظمة .
- (2) بين ان هناك تواترين لحركة المبادرة .
- (3) متى لا يوجد إلا تواتر واحد لهذه الحركة ؟
- (4) عين الشرط اللازم للحصول على الدوامة «النائمة» اي التي يكون دورانها حول محورها الثابت في الفراغ .

□ □ □

## مسائل الفصل الثاني عشر

### المسألة (1 - XII)

تتحرك خرزة (كرة مثقوبة) بدون احتكاك على سلك دقيق مستقيم  $AB$  يدور حول الشاقول المار من  $A$  بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  . نفرض أن كتلة الخرزة  $m$  وطول السلك  $L$  .

- (1) استخراج تابع لاغرانج لهذه الخرزة .
- (2) استنتج معادلات حركتها .
- (3) ادرس الحركة .

(4) عين الزمن اللازم لها لتصل إلى طرف السلك  $B$  علماً بأنها بدأت حركتها من  $A$  دون سرعة ابتدائية .

### المسألة (2 - XII)

نوامس مزدوج مؤلف من سلك طوله  $a_1$  علق في طرفه كتلة  $m_1$  يتم فصل بها سلك آخر طوله  $a_2$  في طرفه الآخر كتلة  $m_2$  . نفرض أن السلكين لا يشنيان أثناء الحركة وأن كتلتيهما مهملتان . في لحظة البدء كانت زاوية السلك الأول مع الشاقول  $\theta_1$  . وزاوية السلك الثاني مع الشاقول  $\theta_2$  . ثم تركت الجملة تتحرك الجملة تتحرك في مستويها الشاقولي .

- (1) استخراج كلا من الطاقة الحركية والكامنة وتابع لاغرانج لهذه الجملة .
- (2) ضع معادلات الحركة بطريقة لاغرانج ثم ادرس الحركة .
- (3) كيف تصبح هذه المعادلات في حالة الاهتزازات صغيرة السمة وتساوي الكتلتين  $m_1 = m_2 = m$  وتساوي الطولين  $a_1 = a_2 = a$  ؟

### المسألة ( IX - 3 )

تتحرك خرزة كتلتها  $m$  على سلك معدني دقيق له شكل ثابت وواقع في المستوى الشاقولي ومطى بمادتيه الوسيطيتين .

$$x = a ( \theta + \sin \theta )$$

$$y = a ( 1 - \cos \theta )$$

حيث :  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  وحيث تتم الحركة بدون احتكاك .

(1) استخرج معادلات لاغرانج وبين أن الحركة دورية .

(2) كيف تصبح هذه المعادلات إذا غيرنا الوسيط كالتالي :

$$u = \cos \frac{\theta}{2}$$

### المسألة ( XII - 4 )

قرصان دائريان متجانسان كتلة الأول  $m_1$  وكتلة الثاني  $m_2$  ونصفا قطريهما  $r_1$  و  $r_2$  بالترتيب . علق القرصان من مركزيهما  $O_1$  و  $O_2$  بخيط واحد مثبت في السقف بنقطة  $O$  وبحيث أن النقط  $O$  و  $O_1$  و  $O_2$  على شاقول واحد وبحيث يستطيع كل من القرصين الدوران في مستوييه الأفقي حول خيط التعلق . وليكن  $c_1$  و  $c_2$  ثابتا قتل جزئي الخيط  $OO_1$  و  $O_1O_2$  بالترتيب . في لحظة البدء أدير القرص الأول والقرص الثاني عن وضع التوازن زاويتي  $\theta_1$  و  $\theta_2$  وتركاهما يهتزان اهتزازاً دوائياً حول الخيط الشاقولي .

(1) احسب الطاقة الحركية للجملة القرصين في لحظة ما  $t$  وكذلك كون هذه الجملة وتابع لاغرانج لها .

(2) استخرج معادلات الحركة وادرسها .

(3) متى يكون للقرصين حركة اهتزازية واحدة ؟

### المسألة ( XII - 5 )

تتحرك نقطة مادية  $p$  كتلتها  $m$  على مجسم قطع مكافئ درواني محوره الشاقول الصاعد  $oz$  ومعادلته .

$$x^2 + y^2 = a z$$

اكتب معادلات الحركة بطريقة لاغرانج .

- (1) باعتبار الجملة بسيطة .
- (2) باعتبار الجملة معقدة .

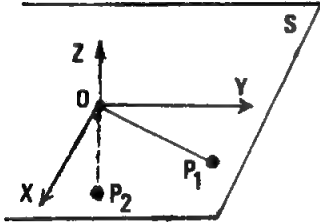
#### المسألة ( 6 - XII )

إذا اعتبرنا الحركة العامة للجسم الصلب فإنه يطلب الآن استعمال طريقة معادلات لاغرانج لاستنتاج :

- ( 1 ) معادلات أولير .
- ( 2 ) معادلات حركة الدوامة .
- ( 3 ) حل المسألة ( 4 - XI ) .

#### المسألة ( 7 - XII )

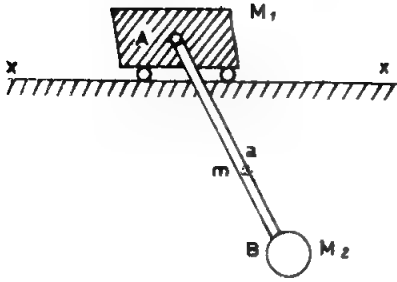
يمثل الشكل المرافق لوحاً معدنياً مستويًا صقيلاً أفقياً  $S$  فيه ثقب صغير  $O$  يمر منه خيط مهمل الكتلة وعديم الامتطاط طوله  $a$  . يرتبط الخيط من طرفيه بكتلتين متساويتين  $P_1$  و  $P_2$  كل منهما  $m$  وتستطيع  $P_1$  الحركة بدون احتكاك على المستوى في حين تستطيع الثانية  $P_2$  الحركة على الشاقول المار من الثقب  $O$



في لحظة ما نعتبرها مبدأ للزمن أعطيت  $P_1$  سرعة ابتدائية في المستوى  $S$  .  
 ( 1 ) عين درجات حرية الجملة وعين التحولات المستقبلية اللازمة كاحداثيات .

- ( 2 ) احسب الطاقة الحركية والطاقة الكامنة وتابع لاغرانج للجملة .
- ( 3 ) استنتج معادلات الحركة .
- ( 4 ) عين الشروط التي تجعل حركة  $P_1$  دائرية منتظمة .

### المسألة (XII - 8)



لينة معدنية A كتلتها  $M_1$  تستطيع الانزلاق بدون احتكاك على مستو افقي  $x'x$  يتم فصل بها قضيب صلب متجانس كتلته  $m$  وطوله  $a$  ويحمل في طرفه الثاني كرة B كتلتها  $M_2$  ويستطيع الحركة في مستو شاقولي .

- 1 ) عين عدد درجات الحرية للجملة S المؤلفة من  $M_1$  و  $M_2$  و  $m$  ، ثم اختر المتحولات التي ترغبها كاحداثيات عامة .
- 2 ) احسب تابع لاغرانج واستخرج معادلات الحركة .
- 3 ) حل المعادلات وادرس الحركة في حالة الاهتزازات صغيرة السعة .

### المسألة (XII - 9)

يتم فصل القضبان المتجانسان AB و BC في النقطة B تمفصلاً بدون احتكاك . طول كل منها  $a$  وكتلته  $m$  . وضما في مستو افقي على استقامة واحدة ، وطبق على الطرف C للقضيب الثاني دفع مقداره  $J$  متعامد مع استقامة القضيب وبحيث ان النقطة C قد اخذت سرعة ابتدائية  $v_0$  . ونفرض ان كل الحركات تم دون احتكاك .

- 1 ) احسب السرعة الابتدائية لكل من A و B .
- 2 ) احسب السرعة الزاوية الابتدائية لكل من القضيبين AB و BC .

### المسألة (XII - 10)

اربعة قضبان معدنية متجانسة ومتماثلة طول كل منها  $a$  وكتلته  $m$  تمفصل فيما بينها بحيث تشكل ممياً بصورة عامة ABCD . يوضع هذا الممى على مستو افقي  $oxy$  بحيث تكون زواياه قائمة ( اي بشكله المربع ) واضلاعه توازي المحورين  $ox$  و  $oy$  .

- يطلق في النقطة A دفع J يوازي oy ونفرض ان الحركة تتم بدون احتكاك .
- (1) استخرج معادلات حركة هذا المين مستملاً القوي النبضية .
  - (2) استنتج بعد ذلك السرعة الابتدائية لكل من D,C,B,A ، وكذلك السرعة الدورانية الابتدائية لكل من القضبان الاربعة .

هنا إبراهيم (المؤلف)

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة  
مكتبتي الخاصة  
على موقع ارشيف الانترنت  
الرابط  
[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

## مسائل الفصل الثالث عشر

### المسألة ( XIII-1 )

يتحرك جسم كتلته  $m$  تحت تأثير حقل الجاذبية الأرضية . اكتب الهاميلتوني لهذا الجسم واستخرج المعادلات القانونية لحركته ( معادلات هاميلتون ) .

### المسألة ( XIII-2 )

يتحرك جسم كتلته  $m$  تحت تأثير حقل قوى مركزي مركزه مبدأ الاحداثيات  $O$  . اكتب تايمة الهاميلتوني واستخرج معادلات حركته القانونية .

### المسألة ( XIII-3 )

لنعتبر جسماً مادياً كتلته  $m$  مقيداً بالحركة على اسطوانة نصف قطرها  $R$  ومحورها  $oz$  ومعادلتها بالتالي  $x^2 + y^2 = R^2$  . يخضع هذا الجسم لقوة متناسبة مع البعد ومتجهة نحو  $O$  ومطاة بالملاقة  $\vec{F} = -k\vec{r}$  حيث  $k$  ثابت و  $r$  شعاع موضع الجسم ، ونهمل قوة الثقالة الأرضية .  
( 1 ) اكتب عبارة الطاقة الحركية والطاقة الكامنة وتايمة لاغرانج وهاميلتون .

( 2 ) استنتج من الأخير معادلات حركة الجسم .

( 3 ) بين أن الاندفاع الزاوي حول  $oz$  ثابت وان الحركة وفق  $oz$  اهتزازية منتظمة .

### المسألة ( XIII-4 )

يتحرك جسم كتلته  $m$  حركة مستقيمة وخاضعاً لتأثير القوة :

$$F(x,t) = \frac{k}{x^2} e^{-(t/a)}$$

حيث  $k$  و  $a$  ثابتان .

- (1) احسب كلاً من الطاقة الكلية وتابع هاميلتون .
- (2) قارن هذين المقدارين وناقش انخفاض الطاقة .
- (3) اكتب معادلات الحركة .

### (XIII - 5) المسألة

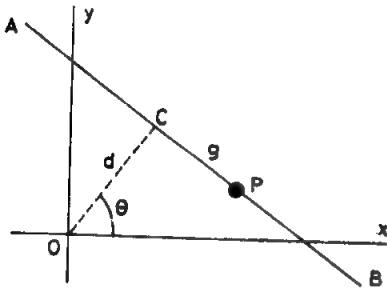
استخرج المعادلات القانونية للحركة من أجل جسم مادي كتلته  $m$  يتحرك على اللولب :

$$r = \text{const} \quad z = k \theta$$

حيث  $k$  ثابت و  $oz$  الشاقول علماً بأنه خاضع لقوة الجاذبية الأرضية .

### (XIII - 6) المسألة

يتحرك جسم  $P$  كتلته  $m$  بتأثير ثقله على سلك  $AB$  في مستو شاقولي .  
بعد مركز الاحداثيات  $O$  عن هذا السلك هو  $OC = d$  . يدور السلك



في المستوي  $oxy$  حول  $O$   
بحيث تبقى  $C$  ثابتة عليه وبحيث  
يبقى البعد  $OC$  ثابتاً . نفرض  
ان الاحداثيين اللازمين لتعيين  
موضع الجسم هما الطول  $CP = q$   
والزاوية  $\theta = \angle XOP$  . كما  
نفرض شروط البدء التالية :

$$\theta(0) = 0 \quad , \quad q'(0) = 0 \quad , \quad q(0) = 0$$

- (1) احسب الهاميلتوني للجسم  $P$  وطاقته الكلية وقارنها وناقش انخفاض الطاقة .
- (2) اكتب معادلات الحركة وبين ان  $q$  تعطى بدلالة الزمن بالملاقة :

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cosh \omega t - \cos \omega t)$$



### المسألة ( 8 - XIII )

1 ( بين أن الهاميلتوني للهزاز التوافقي يعطى بدلالة الاحداثيات الموضعية والاندفاعية بالملاقة :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

2 ( ننقل من  $p$  و  $q$  إلى احداثيين جديدين  $P$  ,  $Q$  حسب الملائتين :

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

حيث  $\omega = \sqrt{k/m}$

بين أن الهاميلتوني يأخذ الشكل  $H = \omega P$

3 ( بين أن  $P = E/\omega = \text{Const}$  حيث  $E$  الطاقة الكلية للهزاز التوافقي .

4 ( بين أخيراً أن  $q$  تعطى بدلالة الزمن بالملاقة :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$$

حيث  $\beta$  ثابت اختياري .

### المسألة ( 9 - XIII )

هل التحويل التالي قانوني :

$$Q = \log\left(\frac{1}{q} \sin p\right) , P = q \cot p$$

### المسألة ( 10 - XIII )

لدينا التحويل :

$$Q = \log(1 + \sqrt{q} \cos p)$$

$$P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p$$

1 ( بين أن هذا التحويل قانوني وأنه إذا كان  $p$  ,  $q$  قانونيين فإن  $P$  ,  $Q$  تكونان كذلك .

( 2 ) بين أن التابع المولد لهذا التحويل هو :

$$G = - ( e^Q - 1 )^2 \tan p$$

### المسألة ( XIII - 11 )

ادرس قانونية التحويل :

$$P = \frac{1}{2} ( p^2 + q^2 )$$

$$Q = \text{Arc tan } ( q / p )$$

### المسألة ( XIII - 12 )

ليكن التحويل المعطى بالملاطين :

$$Q = q^\alpha \cos \beta p$$

$$P = q^\alpha \sin \beta p$$

( 1 ) ما هي قيمتا  $\alpha$  ,  $\beta$  اللتان تجعلان هذا التحويل قانونياً ؟

( 2 ) ما هو التابع المولد لهذا التحويل عندئذ ؟

### المسألة ( XIII - 13 )

من أجل أية قوابع ثلاثة  $F$  ,  $G$  ,  $H$  ل  $p$  ,  $q$  تتحقق العلاقة التالية في معترضات بواسون :

$$[ [F, G], H ] = [ [G, H], F ] + [ [H, F], G ]$$

## مسائل الفصل الرابع عشر

### المسألة ( 1 - XIV )

تتحرك الجلة المطالية  $S'$  بسرعة  $v$  بالنسبة للجلة المطالية  $S$ .  
نعتبر حادثتين  $A, B$  تحصلان في مكانين مختلفين وزمن واحد في الجلة  $S$ .  
بين أن هاتين الحادثتين تحصلان في زمنين مختلفين في الجلة  $S'$  الفرق بينهما :

$$t'_2 - t'_1 = \frac{v (x_2 - x_1)}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

### المسألة ( 2 - XIV )

يتحرك ميزون من الأشعة الكونية مقرباً من الأرض بسرعة قدرها  $v = 0.99c$ .  
أعمر النصف لتفكك هذا الميزون إلى الكترون وفوتريونين يساوي 2.22 ميكرو ثانية وكذلك كما يقاس في حلة الميزون الخاصة. ما قيمة هذا العمر النصف عندما يقاس من قبل راصد على الأرض ؟

### المسألة ( 3 - XIV )

يميل القضيب  $AB$  الذي طوله  $L$  بزاوية  $\theta$  على المحور  $ox$  في الجلة  $S$ .  
بين أن طول هذا القضيب  $L'$  وزاويته  $\theta'$  مع  $ox'$  في الجلة  $S'$  التي تتحرك بالنسبة لـ  $S$  بسرعة  $v$  بعطيان بما يلي :

$$L' = L \left( \frac{\cos^2 \theta}{\gamma^2} + \sin^2 \theta \right)^{1/2}, \quad \tan \theta' = \gamma \tan \theta$$

حيث :

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

المسألة ( 4 - XIV )

تخلق طائرة طولها عشرة أمتار بسرعة قدرها 300 متراً في الثانية .  
ما هو طول هذه الطائرة الذي يقيسه مراقب على الأرض ؟ وبعد كم من  
الزمن تقصر ساعة الطيار مكرو ثانية واحد عن ساعة الراصد على الأرض ؟

المسألة ( 5 - XIV )

اعتبر نواة مشعة كيميائية تدق  $n_0$  مرة في الثانية وتطلق موجة ضوئية  
في كل دقة . فإذا كانت النواة تتحرك بسرعة  $v$  بالنسبة لراصد على الأرض  
فاحسب عندئذ عدد الدقات  $n$  التي يقيسها الراصد في الثانية الواحدة .

المسألة ( 6 - XIV )

يتمد نجم عن الأرض بسرعة قدرها 50 كيلومتراً في الثانية الواحدة  
وتطلق ضوءاً طول موجته 6563 أنغستروم . ما هو مقدار تغير طول  
موجة هذا الضوء عندما يقاس من قبل راصد على الأرض ؟

# المفرد

مقدمة	٥
الاهداء	٧
الفصل الاول : الميكانيك ، اولياته ومسلّماته	٩
الفيزياء وفروعها التقليدية ١١ - الميكانيك واولياته ومسلّماته ١٣	
- اوليات الميكانيك : الزمان والمكان والمادة ١٤ - مسلّمات الميكانيك :	
قوانين نيوتن ١٥ - جمل المقارنة العطالية ١٦ - السرعة والتسارع	
١٩ - المحاور الذاتية للحركة ٢٢ - التسارعان المماسي والناظمي	
٢٣ - العمل والاستطاعة والطاقة الحركية ٢٤ - حقول القوى	
المحافظة والطاقة الكامنة ٢٥ - انحفاظ الطاقة ٢٨ - الاندفاع	
الخطي والدفع الخطي ٢٩ - الاندفاع الزاوي والدفع الزاوي ٣٠	
انحفاظ الاندفاع الخطي والاندفاع الزاوي ٣١ - توازن الجسيم	
المادي ٣٢ - جمل الواحدات والابعاد ٣٣ .	
الفصل الثاني : حقل القوى المنتظم ، القذائف والسقوط ، الحركة	
في وسط مقاوم ، الحركة المقيدة ، الاحتكاك ٤١ . . . . .	
حقول القوى المنتظمة ٤٣ - الحركة في حقل منتظم ، التسارع	
الارضي والثقل ، سقوط الاجسام ٤٣ - كمون الحقل المنتظم ٤٥	
- الحركة في وسط مقاوم ٤٦ - الحركة المقيدة وقوى الاحتكاك ٤٦	
- حركة القذائف ٤٨ - حركة المظلي اثناء السقوط ٥٥ .	
الفصل الثالث : حقل القوى المركزي والحركة الفلكية ٥٩ . . . . .	
تعريف الحقل المركزي ٦١ - خواص الحقل المركزي ٦١ -	

معادلات الحركة في الحقل المركزي ٦٤ - أشكال معادلات الحركة  
٦٦ - تعيين المسار من الحقل المركزي وبالعكس ٦٨ - الطاقة  
الكامنة في الحقل المركزي وعلاقة انحفاظ الطاقة ٦٩ - حركة  
جسيم في حقل مركزي متناسب عكسا مع مربع البعد ٧١ - قوانين  
كبلير الفلكية ٧٧ .

#### الفصل الرابع : قانون التجاذب الكوني . . . . . ٨١

قانون التجاذب الكوني ٨٢ - قوة جذب قضيب لجسيم في مستوي  
تناظره ٨٥ - قوة جذب كرة جوفاء متجانسة لجسيم خارجها ٨٦  
- قوة جذب كرة جوفاء لجسيم داخلها ٨٨ - قوة جذب كرة  
سميكة جوفاء لجسيم داخلها أو خارجها ٨١ - قوة جذب كره  
صماء لجسيم داخلها أو خارجها ٩١ - قوة جذب حلقة دائرية  
منتظمة لجسيم على محورها ٩٣ - قوة جذب قرص دائري  
متجانس لجسيم على محوره ٩٥ .

#### الفصل الخامس : حركة الجسيم المشحون في حقل كهرومغناطيسي . ٩٧

حركة جسيم مشحون في حقل كهربائي ٩٨ - حركة جسيم  
مشحون في حقل مغناطيسي ٩٨ - مطياف الطاقة ومطياف الكتلة  
١٠٣ - السرعات الرخوة ١٠٥ - حركة جسيم مشحون تحت  
تأثير حقلين كهربائي ومغناطيسي ١٠٧ .

#### الفصل السادس : الجمل الاعطالية . . . . . ١١٣

الجمل الاعطالية ١١٥ - الجمل الدوارة ١١٥ - فاعل الاشتقاق  
الاول ١١٨ - المشتق الثاني للشعاع في الجملتين المتحركة والثابتة  
١١٩ - فاعل الاشتقاق الثاني ١٢٠ - السرعة والتسارع ١٢٠  
- الجمل المتحركة بصورة عامة ١٢٣ - حركة جسيم مادي حول  
الارض ١٢٥ - نواس فوكو ١٢٩ .

#### الفصل السابع : حركة المجموعات المادية . . . . . ١٢٧

المجموعات المستمرة والمتقطعة ٣٩ - الكثافة ٣٩ - درجات الحرية  
١١٠ - مركز الكتلة ١٤٠ - اندفاع مجموعة جسيمات مادية ١٤٣  
حركة مركز الكتلة ١٤٣ - مبدأ الاندفاع الزاوي ١٤٥ - الطاقة  
الحركية والعمل ١٤٦ - الطاقة الكامنة ومبدأ انحفاظ الطاقة ١٤٦

— حركة المجموعة حول مركز كتلتها ١٤٨ — الدفع ١٥١ — قيد  
الحركة ١٥٢ — العمل الافتراضي وتوازن المجموعات ١٥٣ — مبدأ  
دالمبير ١٥٥ .

#### الفصل الثامن : الصواريخ والانقسام والاصطدام ١٥٧ . . . . .

حركة كتلة متغيرة ومبدأ المحركات النفاثة ١٥٩ — انقسام جسم  
الى قسمين وحركة كل منهما ١٦٢ — الصواريخ ذات المراحل  
المتعددة ١٦٦ — قاعدة نيوتن في الاصطدام — مرونة الاصطدام ١٦٧  
— الاصطدام الراسي لجسمين ماديين ١٦٨ — الاصطدام الجانبي  
١٧١ .

#### الفصل التاسع : عزوم العطالة ١٧٥ . . . . .

تعاريف ١٧٧ — نظريات عزوم العطالة ١٨٠ — تطبيقات على حساب  
عزوم العطالة ١٨٥ — عزم عطالة جسم حول محور ما زوايا توجيهه  
معلومة ١٨٩ — مصفوفة العطالة ١٩١ — مجسم العطالة ١٩١ .

#### الفصل العاشر : الحركة المستوية للجسم الصلب ١٩٣ . . . . .

الحركة الانسحابية المستوية ١٩٥ — الدوران حول محور ثابت ١٩٥  
— الحركة المستوية العامة للجسم الصلب ١٩٦ — درجات الحرية  
١٩٧ — النظريات الاساسية في حركة الجسم الصلب حول محور  
١٩٧ — تطبيق : دراسة النواس المركب ٢٠٥ — الحركة المستوية  
العامة للجسم الصلب ٢١٣ — تطبيق : حركة اسطوانة دائرية على  
مستو مائل ٢١٤ — المركز الآني للدوران والمحور الآني للدوران  
٢١٧ — تطبيق : تدحرج اسطوانة على مستو مائل ٢٢٠ — توازن  
الجسم الصلب ٢٢٣ تطبيق ٢٢٤ .

#### الفصل الحادي عشر : الحركة الفراغية للجسم الصلب ٢٢٧ . . . . .

الاندفاع الزاوي للحركة الدورانية للجسم لصلب حول نقطة ٢٣٠ —  
الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ٢٣٣ —  
محاور العطالة الرئيسية ٢٣٤ — الاندفاع الزاوي حول محاور  
اعطالة الرئيسية ٢٣٧ — الطاقة الحركية حول محاور العطالة  
الرئيسية ٢٣٨ — نظرية الاندفاع الزاوي ومعادلات أولير للحركة  
٢٣٩ — المستقيم والمستوي اللامتحولان في حالة انعدام العزم

الحاصل ٢٤٠ - حركة الجسم المتناظر ، المخروط الجسمي  
والمخروط الفراغي ٢٤١ - تطبيق : حركة الارض ٢٤٦ - زوايا  
اولير ٢٤٨ - تعيين مركبات شعاع الدوران بدلالة زوايا اولير  
٢٥٢ - دراسة الحركة بدلالة زوايا اولير ٢٥٣ - حركة الدوامة  
الجيروسكوبية ٢٥٤ - تفسير الحركة الجيروسكوبية للدوامة  
٢٦٦ - الجيروسكوب ٢٦٨ .

### الفصل الثاني عشر : ميكانيك لاغرانج . . . . . ٢٧١

الاحداثيات العامة ٢٧٣ - معادلات التحويل ٢٧٤ - تصنيف  
الجمال الميكانيكية ٢٧٤ - السرعة العامة والاندفاعات العامة والطاقة  
الحركية ٢٧٥ - القوى العامة - معادلات لاغرانج للجمال  
البسيطة ٢٧٩ - معادلات لاغرانج للجمال المعقدة ٢٨١ - معادلات  
لاغرانج في حالة القوى النبضية ٢٨٧ .

### الفصل الثالث عشر : ميكانيك هاميلتون . . . . . ٢٩١

تابع هاميلتون ٢٩٣ - معادلات هاميلتون ٢٩٤ - تابع هاميلتون  
للجمال المحافظة ٩٢٥ - الاحداثيات المتكثرة ٢٩٧ - المعادلات  
القانونية للحركة في حقل قوى مركزي ٢٩٨ - الفراغ الطوري  
والاحداثيات الطورية ٢٩٩ - نظرية ليوفيل ٣٠٠ - الحساب  
التفيري ٣٠٦ - مبدا هاميلتون والفعل الاصفر ٣١٠ - التحويلات  
القانونية ٣١١ - التوابع المولدة وشرط التحويلات القانونية ٣١٣ -  
معادلات هاميلتون - جاكوبي ٣١٤ - معترضات بواسون ٣١٦ -  
معادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون ٣١٦ - خواص  
معترضات بواسون ٣١٧ - التابعان المترافقان والتابعان المتبادلان  
٣١٨ .

### الفصل الرابع عشر : الميكانيك النسبي . . . . . ٣٢١

المنهج الاساسي لنظرية النسبية الخاصة ٣٢٤ - تحويلات لورنتز  
- ٣٢٦ - تحويلات لورنتز المعاكسة ٣٣٢ - انسجام تحويلات  
لورنتز مع تحويلات غاليليه ٣٣٣ - فراغ منكوفسكي رباعي الابعاد  
٣٣٣ - تقاصر الطول ٣٣٤ - تطاول الزمن ٣٣٦ - تحويلات لورنتز  
للسرع ٣٣٨ - انسجام تحويلات لورنتز للسرع مع تحويلات  
غاليليه ومع مبدا آينشتاين ٣٣٩ - تحويلات لورنتز للتسارعات



٣٤٠ - انسجام تحويلات تحويلات لورنتز للتسارعات مع تحويلات  
غاليليه ومع مبدأ آشتاين ٣٤٢ - التحريك النسبوي ٣٤٣ .

المسائل ٣٥١ - مسائل الفصل الاول ٣٥٣ - مسائل الفصل الثاني ٣٥٧  
- مسائل الفصل الثالث ٣٦١ - مسائل الفصل الرابع ٣٦٤ -  
مسائل الفصل الخامس ٣٦٧ - مسائل الفصل السادس ٣٦٩ -  
مسائل الفصل السابع ٣٧٥ مسائل الفصل الثامن ٣٨٢ - مسائل  
الفصل التاسع ٣٨٥ - مسائل الفصل العاشر ٣٨٩ - مسائل  
الفصل الحادي عشر ٣٩١ - مسائل الفصل الثاني عشر ٣٩٤ -  
مسائل الفصل الثالث عشر ٣٩٩ - مسائل الفصل الرابع عشر ٤٠٣

\* \* \*

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

هـسإبرهفء اللوسفء



مءآء للءءمفل ؤمن مءموءة كبفرة من المءطبوعات من صفءة  
مءءبءف الءاصة  
على موءع ارشفف الاءءرنء  
الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

صءر باشراف لءنة الانءاز

سعر المفع للءالب ( ٣٠ ) ل.س

\*

٢٢٦